220. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, II

福 原 満 洲 雄 (北大)

§1. $f(x,y)$ ガ $(0,0)$ デ正則デ $f'_y(0,0)=\lambda\neq0$ ナラバ, 一般ニ

$$(a)\qquad x\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

ノ解ガ x, Cx^{λ} (C ハ任意常数) ノ函数ト考ヘテ $(0,0)$ デ正則トナルコトハ既ニヨク知ラレタ事柄デアル. 此ノ古典

的ナ結果ヲ

(f) $f(x,y)=f_0(x)+f_1(x)y+\cdots\cdots+f_n(x)y^n+\cdots\cdots\cdots$

ガ $0<x<\delta$, $|y|<\Delta$ デ一様收斂デ, $x\longrightarrow+0$ ノトキ

(f_n) $f_n(x)\sim f_{n0}+f_{n1}x+\cdots\cdots+f_{nm}x^m+\cdots\cdots\cdots$

ナル形ニ近似的ニ展開サレル場合ニ拡張シテ見ヨウ。先ヅ

(α) $y\sim\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots\cdots\cdots$

ガ (a) ヲ形式的ニ滿足スルヤウニ常数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\cdots$ ヲキメル. 若シ入ガ正ノ整数デナケレバ, ソノヤウニ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\cdots$ ヲキメルコトガ出來ル。而モソノヤウナキメ方ハ唯一通リデアル。

ソノ時 (α) ナル形ニ展開サレル (a) ノ解ガ唯一ツ存在スルコトハ例ノ論法デ証明サレル。若シ $f(x,y)$ ガ x, y ノ正則ナ函数ナラバ, コノヤウニシテ得ラレタ解ガ $x=0$ デ正則ナ函数デアルコトモ特別ニ証明スルホドノコトモナカラウ。

入ガ正ノ整数 n ニ等シイ場合ニハ

$$y=\alpha_1x+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+Zx^n$$

ト置ケバ前回ニ調ベタ場合ニナル。故ニコノ場合ハ考ヘナイ(勿論逆ニ前回ノ場合ヲ今ノ場合ニ直スコトモ出來ル)

§2. (α) ナル形ニ展開サレル (a) ノ解ヲ $\varphi_0(x)$ トシ勝手ナ C ノ値ニ對シテ形式的ニ

(φ) $y\sim\varphi_0(x)+\varphi_1(x)\,Cx^\lambda+\cdots\cdots+\varphi_n(x)(Cx^\lambda)^n+\cdots\cdots$

ガ (a) ヲ滿足スルヤウニ $\varphi_j(x)$ ヲキメル. $\varphi_n(x)$ ハ求積法デ求メラレ, $x\longrightarrow+0$ ノ時

$$(\varphi_n)\quad \varphi_n(x) \sim \varphi_{n0} + \varphi_{n1}x + \cdots\cdots + \varphi_{nj}x^j + \cdots\cdots$$

ナル形ニ展開サレル。若シ $f(x,y)$ ガ (x,y) ノ正則ナ函数ナラバ $\varphi_n(x)$ モ $x=0$ デ正則ナ函数トナルコトハ注意スルマデモナイ。コヽデ $\lambda=\mu+i\nu$ ノ実部 μ ガ正カ，0カ，負カニ依テ三ツノ場合ヲ分ケル。

$\mu>0$　此ノ場合ニハ (φ) ガ (a) ノ解ノ近似展開ニナル、トイフ意味ハ x ガ十分ニ小サイ時

$$\left| y - \left[\varphi_0(x) + \cdots\cdots\cdots + \varphi_{n-1}(x)\left(Cx^\lambda\right)^{n-1}\right]\right|$$
$$< Kx^{n\mu}$$

ガ成立スルトイフコトデアル。証明ノ方法ハモウ一々述ベル必要ハナカラウト思フ，結局

I. 勝手ナ C ノ値ニ對シテ (φ) ナル形ニ展開サレル (a) ノ解ガ唯一ツ存在スル。

トイフ結論ヲ得ル、併シコレダケデ満足スルワケニハ行カナイ、更ニ進ンデ

II. 正ノ数 δ_1, Δ_1 ガ十分小サケレバ $0<x_0<\delta_1$, $|y(x_0)|<\Delta_1$ ヲ満足スル (a) ノ解ハ必ズ (φ) ナル形ニ展開サレル。

コトガ証明サレル．ココマデハ級数 (f) ガ収斂デアル必要ハナイ。近似的ニ (f) ガ成立スレバヨイ，其ノ意味ハ正ノ整数 n ニ對シテ δ', Δ' ヲ十分ニ小サク取レバ $0<x<\delta'$, $|y|<\Delta'$ ノ時

$$\left|f(x,y) - \left[f_0(x) + \cdots\cdots + f_{n-1}(x)\,y^{n-1}\right]\right| < K|y|^n$$

ガ成立スルトイフコトデアル。

III. 級数 (f) ガ一様收斂ナラバ級数 (φ) モ $x=0$ ノ近傍デ一様收斂トナル。

$x \longrightarrow +0$ ノ時

$$\lim x^{-\lambda}[y-\varphi_0(x)]=\varphi_1(0)C$$

トナルコトニ注意シテ，補助変数ヲ含ム微分方程式ニ関スル定理ヲ使ヘバ (a) ノ解ガ C ノ函数ト考ヘテ正則デアルトイフコトガワカル。ソレカラ III ガ得ラレル。補助変数ヲ含ム微分方程式ニ関シテハ、マタ別ノ機會ニ触レテ見タイト思ツテヰル。

此ノヤウナ方法ニ依ツテ進ンデ行クト，$f(x,y)$ ニ関スル假定ガ (a) ノ解 (φ) ニドウ影響シテ來ルカガ分ルヤウニ思フ。$f(x,y)$ ノ近似展開ニ関シテ、モット別ナ假定ノ取リ方モアリ、ソレニ應ジテ (φ) ニ関スル結論ガ変ツテ來ルガ、コヽデハコレ以上深入リスルコトヲヨシテ置ク。

§3. $\mu=0$. 此ノ場合ニハ（$\mu<0$ デモ同様デアルガ）$x\longrightarrow+0$ ノトキ $x^{\lambda}\longrightarrow 0$ トナラナイカラ，x ヲ實変数ト考ヘテ居ル限リ (φ) ガ近似展開ニナルトイフコトハ意味ヲナサナイ。

従ツテ前節ノ論法ハコノ場合ニハ使ヘナイ。ソコデ始メカラ (φ) ガ收斂トナル場合ヲ目標トシテ次ノヤウニ考ヘル。

$$(a')\qquad x\frac{dy}{dx}=f(0,y)$$

ノ解ヲ $y=\psi(Cx^{\lambda})$ デ表ハシ

$$z=y-\psi(Cx^{\lambda})$$

ト置キ z ガ満足スル方程式ヲ

$$(b)\quad x\frac{dz}{dx}=g(x,Cx^{\lambda},z)$$

ト書ク。$g(x,Cx^{\lambda},z)$ ヲ形式的ニ Cx^{λ}, z ノ冪級数ニ展開シタ結果ガ

$$0<x<\delta,\quad |z|<\Delta$$

デ一様収斂デアルヤウニ，更ニ

$$\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x}+\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x}y+\cdots\cdots$$

ノ一様収斂性ヲ仮定スル、サウスレバ (b) ガ $x\to+0$ ノトキ $z\to0$ デアルヤウナ解ヲ唯一ツ持ツコトガ証明サレル. ソレハ C ニ関係シテヰル、コノデ補助変数ヲ含ム微分方程式ニ関スル定理ヲ使ヘバ

IV. x, $|C|$ ガ十分ニ小サイトキ (a) ノ解ハ (φ) ナル形ニ展開サレル (～ハ ＝ デ置換ヘル)

コトガ証明サレル，従ッテ

V. δ'. Δ' ガ十分ニ小サイトキ $0<x_0<\delta'$, $|y(x_0)|<\Delta'$ ヲ満足スル (a) ノ解ハ必ズ (φ) ナル形ニ展開サレル. (～ハ ＝ デ置換ヘル)

§4. $\mu<0$. 此ノ場合ニ (φ) ガ収斂トナル場合ヲ捜ス（一般ニ収斂トハ限ラナイ）ノハ容易デナイシ，大シテ重

要デモナイ。此ノ場合ニハ

VI. (a) ハ (α) ナル形ニ展開サレル解ヲ唯一ツ持ツ. 其ノ他ノ解ハ ($0 < x \leqq x_0$) デ存在スルナラバ $x \to +0$ ノトキ $\underline{\lim}\,|y(x)| \geqq \Delta'$ トナルヤウナ正ノ数 Δ' ガ存在スル。

§5. 以上デハ x ヲ実変数トシタガ, $x = re^{i\theta}$ ガ $r = e^{m\theta}$ (m ハ或キマッタ實ノ常数) ナル曲線ノ上ヲ動クトシテモ全ク同様デアル。

$\mu - \dfrac{\nu}{m} > 0$ ナラバ §2 ニ, $\mu - \dfrac{\nu}{m} = 0$ ナラバ §3 ニ, $\mu - \dfrac{\nu}{m} < 0$ ナラバ §4 ニ相當スル結果ガ得ラレル. 故ニ若シ $x = re^{i\theta}$ ガ動ク範囲ヲ

$$0 < r < \delta, \quad m' \leqq \frac{\log r}{\theta} \leqq m''$$

トスルナラバ, $m' \leqq m \leqq m''$ デアルヤウナ m ノ或値ニ對シテ

$$\mu - \frac{\nu}{m} \geqq 0$$

トナリサヘスレバ級数 (φ) ハ收斂トナル. $f(x, y)$ ガ $(0; 0)$ デ正則トイフ場合ハ $m' = -\infty$, $m'' = +\infty$ デアルカラ, (φ) ノ收斂性ガ分ラナイノハ λ ガ負ノ実数トイフ場合ダケニナル。

コノヤウニ $f(x, y)$ ノ展開ニ関スル假定ト, 級数 (φ)

ノ性質トノ間ノ関係ハ實ニ密接，明瞭ナノデアル。
從來ノ攝級数ニヨル方法ハ手取リ早イカモ知レナイが，コノヤウナ現象マデ説明スルコトハ出來ナイカラ何トナク物足リナサテ感ズル。