

## 226. 擴大サレタ環ニツイテ

森 新治郎 (廣島文理大)

本紙第 17 号ニ秋目氏が *Bewertungstheorie* ヲ用ヒナイテ Krull ノ定理ヲ証明サレマシタ。ソレデ私ハンノ方法ヲ變ヘテ次ノ一般ノ定理ヲ証明シテ見マシタ。

$\mathcal{R}$  ヲ任意ノ環トシ、コレカラ商環  $\bar{\mathcal{R}}$  ヲ作ル。  $\bar{\mathcal{R}}$  ノ元素ノ内デ  $\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0$  ( $a: \bar{\mathcal{R}}$  ノ元素) ナル式ヲ満足スル元素  $\alpha$  ノ集合ハ一ツノ環デアル。コノ環ヲ  $\mathcal{R}^*$  デ表ハスコトニスル。

[定理]  $\mathcal{R} = \text{reguläres Ideal } \mathfrak{p} (\neq (0))$  が存在スルナラバ剰餘環  $\mathcal{R}/\mathfrak{p} =$  於テ倍鎖律が成立スルモノトスル。ソノ上  $\mathcal{R}$  ノ *reguläres Primideal* ノ内  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_k$  ナル有限個ヲ除ケバ他ハ全部 *Hauptideal* デアルナラバ  $\mathcal{R}^*$  ノ *reguläres Ideal*  $\mathfrak{p}^*$  ( $\neq (0)$ ) = 對シテ  $\mathcal{R}^*/\mathfrak{p}^* =$  於イテ常ニ倍鎖律が成立スル。

$R$  の Hauptideal  $\neq 0$  は reguläres Primideal  
 を持つこと、先づ次の関係を証明しよう。

(I)  $d$  が  $f_1, f_2, \dots, f_k$  / 各々 = 含まれてキル *re-*  
*gular* ナル任意ノ元素トスレバ  $R^*$  / 任意ノ元素  $\alpha$  ハ常ニ  
 $\alpha = \frac{a}{d^n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) = テ表ハサレル。コノ  $a$   
 ハ  $R$  / 元素ヲ示ス。

定理 = 述べた假定カラ  $d$  が含ム Primideal  $f_1, f_2, \dots$   
 $\dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_m$  ハ有限個ヲ然モ皆最大 Ideal  
 デアル。今  $\mathfrak{P} = (f_1, f_2, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_m)$  トス  
 レバ  $d$  ハ  $\mathfrak{P}$  / 元素デアツテ他ノ Primideal = ハ決シテ含  
 マレナイ。

$R^*$  / 定義カラ、ソノ元素  $\alpha$  ハ  $\alpha = \frac{a}{b}$  デ表ハサレル余母  $b$  ハ  
*regular* デアル。コノ余母  $b$  = 適當ニ reguläres  
 Element ヲ乗ズレバ、ソノ余母ハ  $\mathfrak{P}$  = 含まレルコト =  
 ナル。故ニ  $b$  ハ  $\mathfrak{P}$  / 元素ト見テ差支ナイ。若シ  $b$  が  $f_1, \dots$   
 $\dots, f_k, \dots, f_m$  以外ノ Primideal  $\mathfrak{p}$  = 含まレル  
 ナラバ  $\mathfrak{p}$  ハ Hauptideal ガカラ  $\mathfrak{p} = (p)$  デアリ、 $p$  ハ  
*regular* ナリ。従ツテ

$$b = p(b_1 + n_1) \quad (n_1: \text{整数}; b_1: R \text{ノ元素})$$

トナル。

$R/(p)$  = 於テハ倍鎖律が成立スルカラ

$$p^s = r' p^{s+l} + b(l_s + n_s) \quad (s, l: \text{正整数}; n_s: \text{整数})$$

今  $b$  ハ  $\mathfrak{p}$  / 任意ノ冪 = 含まレルト假定スレバ

$b = p^{s+l}(b'+n')$  トナリ、上ノ關係ト結ビツクレバ

$p^s = r^{p^{s+l}} p^{s+l}(b_0+n_0)(b'+n')$  然ルニ  $p$  ハ regular

ヅカラ  $\mathcal{R}$  ノ任意ノ元素  $\gamma =$  對シテ常ニ  $\gamma \equiv 0(\mathfrak{f})$  ナル矛盾

ヲ生ズ。依ツテ

$$(1) \quad b = p^s(b''+n''), \quad b \not\equiv 0(\mathfrak{f}^{s+1})$$

ナル正整数  $s$  が存在スル。剰餘環  $\mathcal{R}/(p^{s+1}) = \mathfrak{A}$  單位元素  $e'$  が存在シ、 $de' \equiv e'((p^{s+1}))$  トナルカラ今

$d p^s(b''+n'') \equiv 0((p^{s+1}))$  ト假定スレバ  $p^s(b''+n'')$   
 $= p^{s+1}(b''' + n''')$  トナツテ (1) ト矛盾スル。故ニ

$$(2) \quad bd = p^s d_1, \quad d_1 = d(b''+n'') \not\equiv 0(\mathfrak{f}), \quad d_1 \equiv 0(\mathfrak{f}^2).$$

又  $\mathfrak{f}$  ハ Primideal ズカラ任意ノ正整数  $n =$  對シテ常ニ

$$bd^{n+1} = p^s d^n d_1 \not\equiv 0(\mathfrak{f}^{s+1}).$$

然ルニ  $d$  ハ  $d^n + a_1' d^{n-1} + \dots + a_n' = 0$  ( $a_i'$ :  $\mathcal{R}$  ノ元素) ヲ満足スルカラ

$$(3) \quad d = \frac{a_1}{b_1}, \quad b_1 \not\equiv 0(\mathfrak{f}), \quad b_1 \equiv 0(\mathfrak{f}^2).$$

ヲ得ル。ソシテ  $b_1$  ハ  $d_1$  ト  $d$  ノアル冪トノ積ヅカラ  $b_1$  ヲ含

ム Primideal ヨリ以外ノ Primideal = 含マレルコ

トナシ。コノ様ニ考ヘカラシテ  $b_1$  ハ  $\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_k, \dots$

$\dots, \mathfrak{f}_m$  以外ノ Primideal = ハ決シテ含マレナイトシ

テヨイ。

$d$  ハ regular ズカラ  $\mathcal{R}/(d) =$  倍鎖律が成立シテ

$$(4) \quad b_1^t = d d_2 \quad (t: \text{正整数})$$

トナル。然るに  $d_2$  は  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k, \dots, \mathfrak{p}_m$  以外, *Primi-ideal* =  $\mathfrak{p}$  含マレナイ。従ツテ又、

$$(5) \quad d^l = (d_2 d)^{t-1} d_3 \quad (l: \text{正整数})$$

ヲ得ル。故ニ (3), (4), (5) カラ

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 b_1^{t-1}}{b_1^t} = \frac{a_1 b_1^{t-1}}{d d_2} = \frac{a_1 b_1^{t-1} d^l}{d^l d d_2} \\ &= \frac{a_1 b_1^{t-1} d_3}{d^l} = \frac{a_2}{d^l} \end{aligned}$$

コトニ  $a_2$  ハ明ニ  $\mathcal{R}$  ノ元素デアルカラ (I) ハ証明サレタ。

(II)  $\mathcal{R}^* (\neq (0))$  ヲ  $\mathcal{R}^*$  ノ *reguläres Ideal* トスレバ剰餘環  $\mathcal{R}^* / \mathcal{R}^*$  = 於テ倍鎖律ガ成立スル。

(I) = 於テ得タ結果ヲ用ヒテ拙著 (廣島文理大紀要第五卷 第三号、頁 137—138.) = 述ベタ方法ニヨツテコレヲ証明シ得ル。

最後ニ  $\mathcal{R}$  ノ *reguläres Primideal* ガ皆 *Hauptideal* ナル場合ヲ考ヘネバナラス。

(a) 任意ノ *reguläres Ideal*  $\mathfrak{A} (\neq (0))$  = 對シテ  $\mathcal{R} / \mathfrak{A}$  ガ零 = 單位元素ヲ有スレトキハ  $\mathcal{R} = \mathfrak{A}^*$  トナル。

(b)  $\mathcal{R} / \mathfrak{A}$  ガ單位元素ヲ有シナイトキハ  $\mathcal{R} = \mathfrak{A}^*$  トナルカ又ハ前ノ場合ト同様ニシテ定理ノ成立ヲ証明シ得ル。

$\mathcal{R}$  = 單位元素ガ存在スレバ証明ハ簡單ニナリマス。

以上ノ説明ニ不充ルナ点モアリマセタシ尙  $\mathcal{R}^*$  ノ色々ノ問題モアリマスガ、コレハ他日ニ殘スコトニ致シマス。