228. 有限個領域ニ於ケル函數ニ就イテ

伊藤　誠（御影師範）

$\boxed{1}$ 今 $\{0, 1\}$ ナル2個ノ整數カラナル領域ニ於イテ次ノ表ニヨッテ定メラレル二變數ノ函數 $\varphi(x_1, x_2)$ ヲ考ヘル。

$\longrightarrow x_2$

φ	0	1
0	1	0
1	0	0

$\downarrow x_1$

然ルトキハ此ノ領域ニ於ケル任意ノ r 變數ノ函數 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_r)$ ハ上ノ函數ヲ何回カ *iterieren* スルコトニヨッテ *erzengen* スルコトが出來ル。

何故ナラバ先ヅ1變數ノ函數ハ明ラカニ $2^2=4$ 個ダケアリ。之ハ

1. $\varphi(x, x) = \sigma(x)$

2. $\varphi(\varphi(x, x), \varphi(x, x)) = \sigma(\sigma(x)) = \bar{\sigma}(x)$

3. $\varphi(x, \varphi(x, x)) = \varphi(x, \sigma(x)) \equiv 0$

4. $\varphi(\varphi(x, \varphi(x, x)), \varphi(x, \varphi(x, x))) = \sigma(\varphi(x, \sigma(x))) \equiv 1$

ニヨッテ表ハサレル。但シコヽニ $\sigma(x)$, 及ビ $\bar{\sigma}(x)$ ハ

$$\begin{cases}\sigma(0) = 1 \\ \sigma(1) = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\bar{\sigma}(0) = 0 \\ \bar{\sigma}(1) = 1\end{cases}$$

ナル性質ヲ有スル。

次ニ $(r-1)$ 變数マデノ函數ハスベテ $\varphi(x_1, x_2)$ ノ

Iteration ニヨッテ *erzengen* スルコトガ出來タモノト假定スル。今任意ノr変数函數 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_r)$ ヲ取レバ，之ハ次ノ如ク書キ表ハセル:

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_r) = f(0, x_2, \cdots\cdots, x_r)\cdot\sigma(x_1) + f(1, x_2, \cdots\cdots, x_r)\cdot\overline{\sigma}(x_1) \quad \cdots\cdots (1)$$

因ッテ

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2) = \varphi[\varphi(x_1, x_2), \varphi(x_1, x_2)] = \sigma(\varphi(x_1, x_2)) \\ \psi_2(x_1, x_2) = \varphi[\varphi(x_1, x_1), \varphi(x_2, x_2)] = \sigma(\sigma(x_1), \sigma(x_2)) \end{cases}$$

ナル二ツノ函数ヲ考ヘルト，此ノ領域ニ於テハ

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2) = x_1 \times x_2 \\ \psi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \qquad x_1 = 0 \text{ od. } x_2 = 0 \text{ ノトキ} \\ \qquad\qquad\quad = 1, \qquad x_1 = x_2 = 1 \text{ ノトキ} \end{cases}$$

トナル故，(1) ノ右辺ハ

$$\psi_2[\psi_1(f(0, x_2, \cdots\cdots, x_r), \sigma(x_1)), \psi_1(f(1, x_2, \cdots\cdots, x_r), \overline{\sigma}(x_1))]$$

ト書クコトガ出來ル。コヽニ σ, $\overline{\sigma}$, ψ_1, ψ_2 ハ既ニ示シタ如ク φ ノ *Iteration* ニヨッテ定義サレ，又 $f(0, x_2, \cdots\cdots, x_r)$ 及ビ $f(1, x_2, \cdots\cdots, x_r)$ ハ何レモ $(r-1)$ 変数ノ函數デアルカラ、假定ニヨッテ $\varphi(x_1, x_2)$ ノ *Iteration* ニヨッテ *erzengen* サレ得ル。從ッテ上式即チ $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_r)$ モ亦 φ ニヨッテ *erzengen* サレルコトトナル。

以上ニヨッテ此ノ領域ニ於ケル悉エル函数ハ只一ツノ2変数函数 $\varphi(x_1, x_2)$ ニヨッテ *erzengen* サレルコトガ

分ツタ。

$\varphi(x_1, x_2)$ ノ代リニ次ノ函數 $\varphi'(x_1, x_2)$ ヲ取ツテモ矢張リ同様ノコトガ云ヘル：

$$\begin{array}{c} \longrightarrow x_2 \\ \end{array}$$

φ'	0	1
0	1	1
1	1	0

($\downarrow x_1$)

何故ナラバ $\varphi(x_1, x_2)$ ハ $\varphi'(x_1, x_2)$ ニヨツテ次ノ如ク表ハセルカラ：

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi'\left[\varphi'(\varphi'(x_1, x_1), \varphi'(x_2, x_2)), \right.$$
$$\left. \varphi'(\varphi'(x_1, x_1), \varphi'(x_2, x_2))\right].$$

扨テ φ, φ' 以外ニハ最早ヤ斯様ニ總ベテノ *Funktionen* ヲ *erzeugen* スル *Basisfunktion* ハナイデアラウカ？ 答ハ然リデアル. 証明ハ次ノ様デアル。

２変数函數ヲ $f(x_1, x_2)$ トスルトキ,

1°) $f(0, 0) = 0$ ナル如キ f ハ *Basis* トナリ得ナイ。何故ナラ、カヽヽナ *Funktion* ヲ何回 *iterieren* シテモ $x=1$ ナル函数ハ得ラレナイカラ。

2°) $f(1, 1) = 1$ ナル如キ f モ亦 *Basis* トナリ得ナイ.

何故ナラ、之ニヨツテ $x=0$ ナル函数ハ得ラレナイ故.

3°) $f(x_1, 0) = 1$, $f(x_1, 1) = 0$ ナル如キ f モ亦不可.

何故ナラ此ノトキハ $f(x_1, x_2)=1-x_2$ トナリ、之ヲ *iterieren* スルコトニヨツテ生ズル 1 変数函数ハ x 又ハ $1-x$ ダケデ $x=1$, 又ハ $x=0$ ナル函數ハ得ラレナイ。

4°) $f(0, x_2)=1$, $f(1, x_2)=0$ ナル如キナモマタ 3°) ト同様ニ *Basis* トナリ得ナイ。

1°), 2°), 3°), 4°) 以外ノ函數デ常数トナラナイモノハ先ニ挙ゲタ φ 及ビ φ' ノミデアル。

$\boxed{2}$ 上述ニ於イテハ便宜上 $\{0, 1\}$ ナル二整數カラナル領域ニツイテ考ヘタガ、$\{\alpha_0, \alpha_1\}$ ナル任意ノ2元素カラナル領域ニツイテ考ヘテモ結果ハ全ク同様デアル。

上ノ所論ヲ任意ノ $\nu=n+1$ 個ノ *Elemente* $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \text{------}, \alpha_n\}$ カラナル所謂 ν-*zahlig* ナ領域ニ拡張スルコトハ出來ナイデアラウカ?

之ニ就イテ分ツタ事柄ダケヲ述ベテミル。

便宜上前ト同様ニ $\{\alpha_0, \alpha_1, \text{------}, \alpha_n\}$ ヲ $\{0, 1, 2, \text{------}, n\}$ ナル整数デ代表サセルコトニスル. 先ヅコノ領域ニ於ケル任意ノ1変数ノ函数 $f(x)$ ヲ取ツテ考ヘルト, 之ハ次ノ如ク書キ表ハセル:

$$f(x)=\sum_{\lambda=0}^{n} f(\lambda)\cdot\sigma(x, \lambda) \text{ ----------------- } (1)$$

但シコヽニ $\sigma(x, \lambda)$ ナル函數ハ

$$\begin{cases} x=\lambda \text{ ナルトキ } & 1 \\ x\neq\lambda \quad 〃 & 0 \end{cases}$$

ナル1変数ノ函数ヲ表ハスモノトスル。

今特ニ

$$\begin{cases}\psi_1(x_1, 0) = 0 \\ \psi_1(x_1, 1) = x_1\end{cases} \qquad \begin{cases}\psi_2(x_1, 0) = x_1 \\ \psi_2(0, x_2) = x_2\end{cases}$$

ナル性質ヲ有スル二ツノ函数 $\psi_1(x_1, x_2)$, $\psi_2(x_1, x_2)$ ヲ考ヘルト

$$\begin{cases}\psi_1(x_1, x_2) = x_1 \times x_2 & x_2 = 0 \text{ od. } 1 \text{ ノトキ} \\ \psi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 & x_1 = 0 \text{ od. } x_2 = 0 \text{ ノトキ}\end{cases}$$

ナル故、(1) ノ右辺ハ ψ_1, ψ_2 並ビニ $x = f(\lambda) = konst.$, 及ビ $\sigma(x, \lambda)$, ($\lambda = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n$) ナル1変数函数ニヨツテ書キ表ハサレル。而モ此ノ際 (1) ノ右辺ヨリ分ルヤウニ ψ_1 ハ $(n+1)$ 回, ψ_2 ハ n 回用ヒラレル。

次ニ任意ノ r 変数函數 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_r)$ ヲ取ルト, 前同様

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_r) = \sum_{\lambda=0}^{n} f(\lambda, x_2, \cdots\cdots, x_r) \cdot \sigma(x_1, \lambda)$$

ト書クコトガ出来ル。從ツテ $(r-1)$ 変数函数マデハ ψ_1, ψ_2 及ビ $x = k$, ($k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n$), $\sigma(x, \lambda)$, ($\lambda = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n$) ナル1変数函数ニヨツテ悉ク erzeugen スルコトガ出来ルト假定スレバ, r 変数函数ノ場合ニモ矢張リ然ルコトガ言ヘル。而シテコノ場合ニハ ψ_1 ハ $(n+1)^r$ 回, ψ_2 ハ n^r 回, σ ハ $(n+1)^r$ 回 $x = k$, ($k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n$) ハ各1回宛用ヒラルルコトガ Induktion ニ

ヨッテ容易ニ分ル。

上述ニヨッテ一般ニ次ノ定理が得ラレル：

〔定理〕 $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n\}$ ナル $\nu = n+1$ 個ノ Elemente カラナル所謂 ν-zahlig ノ Bereich ニ於イテハ、任意ノ函数 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\nu)$ ハ上述ノ如キニツノ2変数函数 $\psi_1(x_1, x_2)$, $\psi_2(x_1, x_2)$ 及ビ $x=k$ $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$, $\sigma(x, \lambda)$, $(\lambda=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$ ナル $2(n+1)=2\nu$ 個ノ1変数函数ニヨッテ erzengen サレル。而シテコノ際 ψ_1 ハ ν^ν 回, ψ_2 ハ $(\nu-1)^\nu$ 回, σ ハ ν^ν 回, $x=k$ $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$ ハ各1回宛用フレバ充分デアル。

此ノ定理ノ上ニ述ベタ証明ハ神戸商大ノ水谷一雄氏カラ教ヘテ頂イタ方針ニ従ッテ行ッタモノデアル。更ニ残サレタ問題ハ

〔第一〕 2-zahlig ノ領域ニ於ケルヤウニ, ψ_1, ψ_2 及ビ悉ユル1変数函数ヲ只一ツノ2変数函数ニヨッテ erzengen スルコトが出来ナイカ？ 若シ出来ルトスレバ幾通リ左様ナ函数が存在スルカ？

〔第二〕 上ノ所論ヲ abzählbar unendlich 又ハ連続領域ニ拡張シタラ如何ナルカ？

ト云フコトデアル. 第一ノ問題ノ中『只一ツノ2変数函数 $\varphi(x_1, x_2)$ トシテ次ノゴトキモノヲ撰ベバ、之レニヨッテ総テノ1変数函数が erzengen サレルコト』ハ角谷, 水

谷両氏が置換群ノ考ヘヲ用ヒテ解決サレタ。

$\longrightarrow x_2$

$\downarrow x_1$	0	1	2	3	4	--------	$n-2$	$n-1$	n
0	1							$n-1$	n
1	1	2							n
2	1	0	3						
3		1	2	4					
4			2	3	5				
				3	4				
⋮					4				
$n-2$							$n-1$		
$n-1$							$n-2$	n	
n							$n-2$	$n-1$	0

猶未解決ノ点ニ就イテ諸賢ノ御教示ヲ得レバ幸ヒデアル。

—（1935, 10, 10）—