231. 單葉函數ニ就イテ

南　右内（札幌一中）

任意ノ凸領域 D ニ於テ定義セラレタ函數

$$f(z)=\frac{a}{z}+g(z)$$

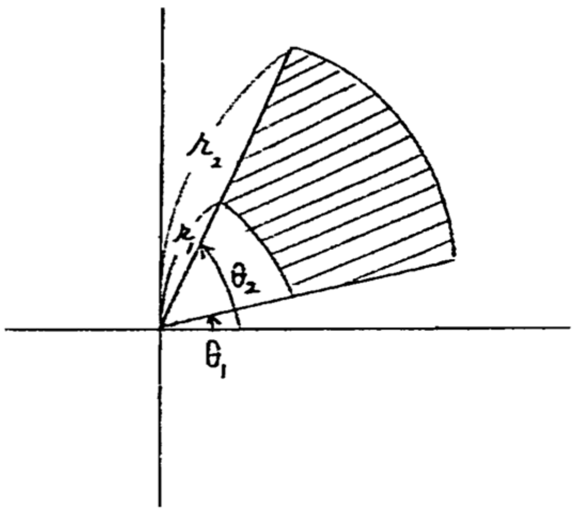
ノ單葉性ニ就イテ考ヘル、但シ $g(z)$ ハ D ニ於イテ正則ナ函數トス。

次ニ述ベル定理ハ特別ナル場合ニハ佐藤氏（系1参照）ノ結果ヲ含ミ、能代氏ノ定理（$a=0$ ナルトキ）ノ拡張ニモナッテヰル。

以下ノ論ニ於テ使フ扇形ナル言葉ノ意味ハ次式ヲ満足ス

ルzノ範囲ト定義シテ置ク。

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1 \leqq \arg z \leqq \theta_2 \\ r_1 \leqq |z| \leqq r_2\end{array}\right\}$$



但シコノ扇形ノ中ニハ

$r_1=0,\ r_2=\infty,\ r_1=r_2$

等ノ場合モ含マシメル。

定理. 凸領域Dニ於テ $g(z)$ ハ正則トシ

$f(z)=\dfrac{a}{z}+g(z)$ ナル函数ヲ考ヘル、コレガ次ノ條件ヲ満足スルトスル。

1°. $w=g'(z)$ $(z\in D)$ ハ w-plane ノ凸領域 $\mathfrak{a}$ ノ内部ニアル。

2°. z-plane ニ於テ扇形Aガ $w=\dfrac{a}{z^2}$ ニヨリ w-plane ノ扇形 $\mathfrak{B}$ ニ寫像サレテ $\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{a}=0$

然ルトキハ $f(z)$ ハ A・D ニ於テ單葉デアル。

(注意) $\mathfrak{B}$ ハAカラ初等幾何学的ニ常ニ簡單ニ作図出來テ矢張リ扇形トナル。

証明. A・D ニ任意ノ相異ナル二点 $z_1,\ z_2$ ヲ取レバ $z_1,\ z_2$ ヲ結ブ線分ハDノ中ニ入ッテ來ル。

従ッテ

$$\begin{aligned} f(z_1)-f(z_2) &= \frac{a}{z_1}-\frac{a}{z_2}+g(z_1)-g(z_2) \\ &= \frac{a}{z_1z_2}(z_2-z_1)-\int_{z_1}^{z_2} g'(z)\,dz \end{aligned}$$

$$=\left[\frac{a}{z_1 z_2}-\frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2} g'(z)\,dz\right](z_2-z_1)$$

然ルニ $z_1, z_2 \in A$ ナル故，扇形ノ性質ニヨリ $\frac{a}{z_1 z_2}\in\mathcal{B}$，
又 $g'(z)\in\mathcal{A}$ ナル故，複素変数ニ於ケル Weierstrass ノ平均値ノ定理ニヨリ

$$\frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2} g'(z)\,dz \in \mathcal{A}$$

トナル。而モ $\mathcal{B}\cdot\mathcal{A}=0$ ナル故

$$\frac{a}{z_1 z_2} \neq \frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2} g'(z)\,dz$$

他方デ $z_2-z_1\neq 0$ ナル故

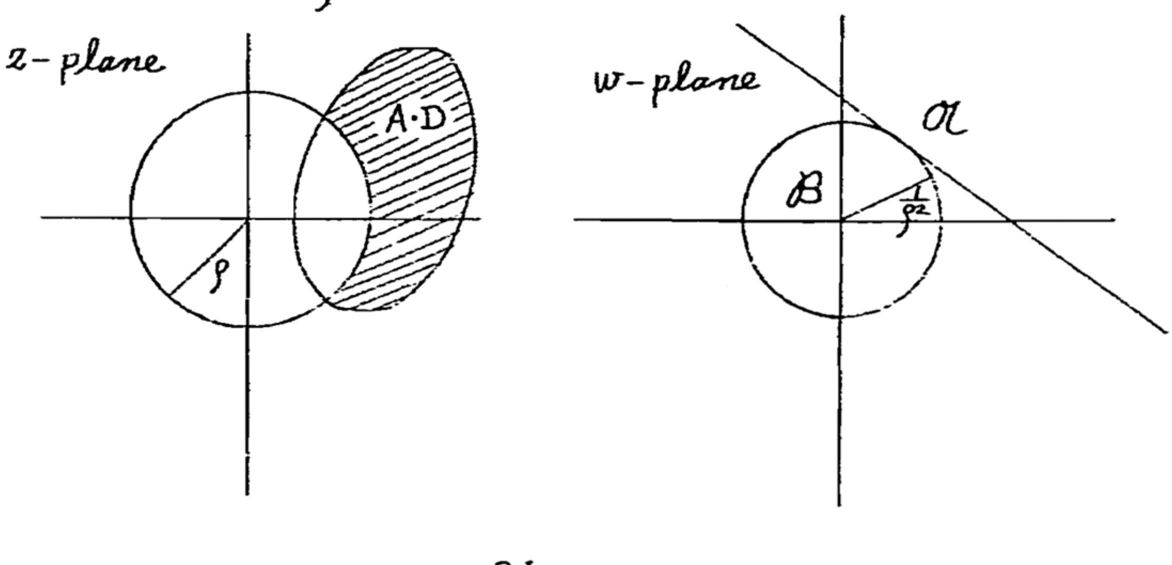
$$f(z_1)-f(z_2)=\left[\frac{a}{z_1 z_2}-\frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2} g'(z)\,dz\right](z_2-z_1)\neq 0$$

即チ $f(z)$ ハ A・D ニ於テ単葉デアル。

系 1　前定理ニ於テ $a=1$ ナル場合ヲ考ヘル．

　A；　$|z|>\rho$，　$0\leqq \arg z<2\pi$ トスレバ

　$\mathcal{B}$；　$|w|<\frac{1}{\rho^2}$　トナル。



故ニ α ガ w-plane ニ於イテ原点ヲ中心半径 $\frac{1}{\rho^2}$ ノ外ニアル凸領域ナラバ良イコトニナル（即チ α ガコノ円ノ切線ノ円ト反對側ニアレバヨイ）

從ツテ次ノ定理ガ得ラレル。

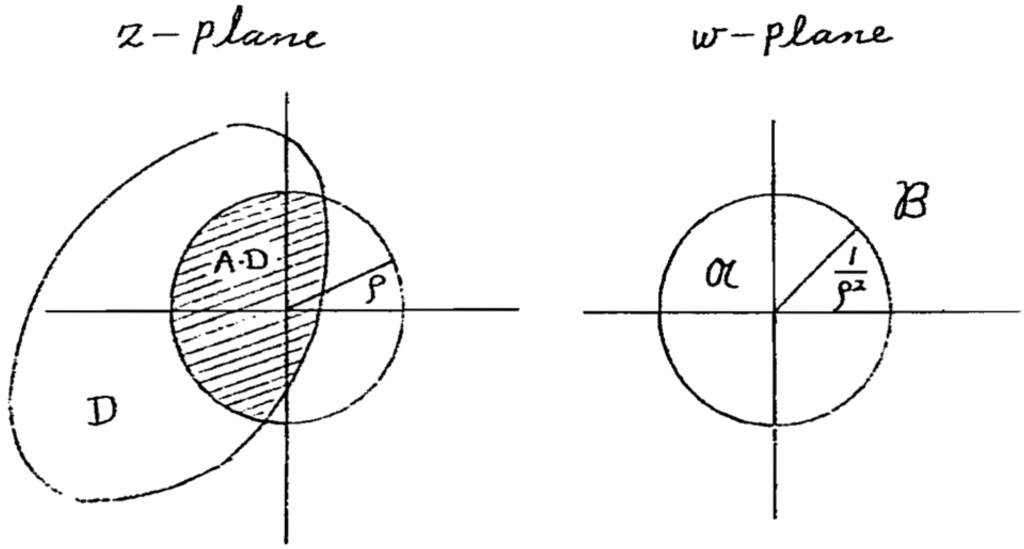
"$f(z)=\frac{1}{z}+g(z)$; $g(z)$ ハDデ正則；ナル函數ヲDニ於イテ考ヘル，Dニ於イテ $R[e^{i\theta}g'(z)]>\frac{1}{\rho^2}$ ナラバ $f(z)$ ハDニ含マレル原点ヲ中心半径 ρ ノ円外デ單葉ナリ"

即チ佐藤德意氏（學士院紀事 Vol. XI, No. 6, 第212頁參照）ガ前ニ得ラレタ定理トナル。

系2. 系1ノ場合ト同様 $a=1$ トスル

A; $|z|<\rho$ トスレバ

B; $|w|>\frac{1}{\rho^2}$ トナル。



故ニ α ハ w-plane ノ原点ヲ中心半径 $\frac{1}{\rho^2}$ ノ円ノ内部ナラバ良イコトニナル．從ツテ $\frac{1}{\rho^2}=M$ トヲケバ次ノ定理ガ得ラレル。

"凸領域 D ニ於イテ $g(z)$ ヲ正則トシ $f(z)=\frac{1}{z}+g(z)$ ヲ考フレバ若シモ D ニ於テ $|g'(z)|<M$ ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<\frac{1}{\sqrt{M}}$ デ單葉ナリ"

系3. 本定理ニ於テ $a=0$ ナル場合ヲ考ヘル.

A; z-plane 全体トスレバ

$\mathcal{B}$; $w=0$ 一点トナル.

從ッテ α ハ原点ヲ通ル直線ノ一方ノ側ニアレバ良イコトニナル故ニ次ノ定理ガ得ラレル。

"$f(z)$ ハ凸領域 D ニ於テ正則トス、若シ D ニ於イテ $R[e^{i\theta}f'(z)]>0$ ナラバ $f(z)$ ハ D ニ於テ單葉ナリ"

之レ能代氏ノ定理〔北海道帝國大學理學部紀要 Ser, I. Vol. II, 第151頁〕デアル。 以上

—— 1935, 10, 10 ——