234. normal デアッテ completely normal デナイ空間ノ一例

角谷静夫（阪大）

(x, y) 平面上ノ点全体ヲ空間トスル，直線 $x=x_0$, $-\infty<y<+\infty$ ヲ L_{x_0}, $y=y_0$, $-\infty<x<+\infty$ ヲ L'_{y_0} ニテ表ハシ、各点 (x_0, y_0) ノ近傍ヲ次ノ如ク定義スル。

1° $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ ナルトキハ (x_0, y_0) ノミヲ近傍トスル。即チコノ点ハ孤立点トナル。

2° $x_0 \neq 0$, $y_0 = 0$ ナルトキハ直線 L_{x_0} ヨリ (x_0, y_0) 以外ノ点ヲ任意ニ有限個取リ去ッタモノヲ近傍トスル。

3° $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$ ナルトキハ直線 L'_{y_0} ヨリ (x_0, y_0) 以外ノ点ヲ任意ニ有限個取リ去ッタモノヲ近傍トス

ル。

4° $x_0=0$, $y_0=0$ ナルトキハ空間全体ヨリ任意ニ有限個ノ L_{x_i}, L'_{y_k} ($x_i \neq 0$, $y_k \neq 0$) ヲ取リ去ッタモノヲ近傍トスル。

此ノ如ク定義サレタ空間ガ Hausdorff ノ空間デアルコトハ明カデアル。先ヅコレガ normal デアルコトヲ示サウ。

A,B ヲ二ツノ互ニ素ナ閉集合トスル。

原点 $O=(0,0)$ ハ A 又ハ B ニ属シナイ。$O \in A$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。$A' \subset A$ デアルカラ $O \in A'$ デアル。シタガッテ 4° ヨリ適当ナ x_i, y_k ($i=1,2,\cdots\cdots,n$; $k=1,2,\cdots\cdots,m$; $x_i \neq 0$, $y_k \neq 0$) ヲトレバ A ハ有限個ノ直線

$$L_{x_i},\ L'_{y_k} \quad (i=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots\cdots,m)$$

ノ和集合ニ含マレル。

i) $P_i=(x_i,0)$ ガ A ニ属スルトキハ $P_i \in B'$ デアルカラ 2° ヨリ L_{x_i} 上ニハ B ノ点ハ有限個シカ存在シナイ。

$$A_i=L_{x_i}-L_{x_i}\cdot B$$

トオク。

ii) $P_i=(x_i,0)$ ガ A ニ属シナイトキハ $P_i \in A'$ デアルカラ L_{x_i} 上ニハ A ノ点ハ有限個シカ存在シナイ。

$$A_i=L_{x_i}\cdot A$$

トオク。

iii) 次ニ全ク同様ニ $P'_k=(0, y_k)$ ガAニ属スルカ属シナイカニ従ッテ A'_k ヲ

$$A'_k = L'_{y_k} - L'_{y_k}\cdot B$$

又ハ $$A'_k = L'_{y_k}\cdot A$$

ニヨッテ定義スル。

今 $$O(A) = \sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{k=1}^{m} A'_k$$

ヲ作レバ i) ii) iii) ヨリコレハ明カニ開集合デ

$$A \subset O(A),\quad B\cdot O(A) = 0$$

デアル。トコロガ一方 $O(A)$ ハ閉集合デアルカラ $O(B)=C(O(A))$ トオケバ $O(B)$ ハ開集合トナリ

$$A\subset O(A),\quad B\subset O(B),\quad O(A)\cdot O(B) = 0 \text{ --------- } (1)$$

デアル。故ニコノ空間ハ *normal* デアル。

次ニコレガ *completely normal* デナイコトヲ示サウ。

A,Bヲ次ノ如ク定義スル。

A: $x \neq 0,\ y=0$ ナル点 (x, y) 全体

B: $x=0,\ y\neq 0$ 〃

明カニ $A\cdot B = A'\cdot B = A\cdot B' = 0$ デアル。然ルニ (1) ヲ満足スル開集合 $O(A), O(B)$ ハ存在シナイ。

何者，若シコノヤウナ $O(A), O(B)$ ガ存在スルトスレ

バ $A \subset O(A)$ ヨリ ii) ニヨッテ各々ノ L_n ($n=1,2,\cdots\cdots$) ノ上ニハ $O(A)$ ニ属シナイ点，シタガッテ $O(B)$ ニ属スル点ハ有限個シカ存在シナイ。コレラノ点ノ y—座標ヲ $y_{n,1}, y_{n,2}, \cdots\cdots, y_{n,p_n}$ トスレバ $y_{n,j}$ ($1 \leqq j \leqq p_n$, $n=1,2,\cdots\cdots$) ハ全体デ多クトモ可附番個シカ存在シナイカラ適當ニ y_0 ヲトレバコレラノ何レトモ一致シナイヨウニ出來ル。コノ y_0 ニ對シテ点 (n, y_0) ($n=1,2,\cdots\cdots$) ハ假定ヨリ $O(B)$ ニ属シナイ。コレハ $(0, y_0)$ ガ $O(B)$ ニ属スルコトニ矛盾スル。

ヨッテコノ空間ハ completely normal デナイ。

コノ空間ハ $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ ナル部分ダケ考ヘテモ同様ノコトが云ヘル。又、x ノ座標ハ可附番個ダケ考ヘレバ十分デアル。

(注意) 上記ノ空間ヨリ原点 O ヲ取去ッタモノハ regular デアッテ normal デナイ。