240. 或ル種ノ線狀移動可能函數方程式ニ就イテ（IV）

北川 敏 男（阪大）

10. §5 以後ニ於イテ、$G(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{s}\beta_{s}$ ニ於イテ $\beta_0 \neq 0$ ト假定シテ *Bernoulli's polynomials* ヲ導入シタガ，一般ニ、$\beta_0, \cdots\cdots, \beta_{k-1}=0$, $\beta_k \neq 0$ ナルトキデモ事情ハ變ラナイコトヲ附言シテオク。コノ場合、任意ノ $k-1$ 次ノ多項式ハ *homogeneous equation* $\Gamma P(x)=0$ ノ解ニナル．コノトキ

$$(1)\quad \frac{\lambda^{k}e^{\lambda x}}{G(\lambda)}=\sum_{s=0}^{\infty}B_{s+k}^{k}(x)\lambda^{s}$$ トオケバ

(2) $\quad \Gamma \overset{k}{B}_{s+k}(x) = \dfrac{x^s}{s!} \qquad (s = 0, 1, 2, \text{------})$

(3) $\quad \dfrac{d\overset{k}{B}_{s+k}(\xi)}{d\xi} = B_{s+k-1}(\xi)$

(4) $\quad \overset{k}{B}_s(x+h) = \sum\limits_0^s \dfrac{h^i}{i!} \overset{k}{B}_{s-i}(x)$

(5) $\quad \overset{k}{B}_s(x) = \sum\limits_{i=0}^s \overset{k}{B}_i \dfrac{x^{s-i}}{(s-i)!}$

(6) Euler-Maclaurin ノ定理ノ擴張

$$g(x+h) = \sum_{j=0}^{m+k} \overset{k}{B}_j(h)\Gamma f^{(j)}(x) + \int_0^h \frac{(h-s)^m}{m!} g^{(m+1)}(x+s)ds$$

$$-\sum_{j=0}^{m+k} \overset{k}{B}_j(h)\Gamma_\eta\left\{\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{m+k-j}}{(m+k-j)!} g^{(m+1)}(x+s)ds\right\}$$

但シ, $\left.\begin{aligned} & f^{(k)}(x) = g(x) \\ & \Gamma_\eta p(\eta) = \sum_{k=0}^m \int_0^b p^{(s)}(\eta)d\varphi_k(\eta) \end{aligned}\right\}$ ヲ

意味スル。

更ニ,

$$g(x+h) = \sum_{j=0}^{m+k} \overset{k}{B}_j(h)\Gamma f^{(j)}(x)$$

$$+\Gamma_\eta\left\{\int_\eta^h \overset{k}{B}_{m+k}(h-s+\eta) g^{(m+1)}(x+s)ds\right\}$$

トモ書ケル。等々

以上，定差法ノ基本事項ノ成立スルコトハ，§5 以後ト変ラナイ。尚コレラノ事ハ，昨年 M. Ghermanesco ガ Acta Math. Bd. 62 デ論ジタコトト平行デアル。氏ノ考ヘタハ

$$\overset{x}{\underset{p}{E}} F = A_0 F(x) + A_1 F(x+\omega_1) + \cdots + A_p F(x+\omega_p) = g(x)$$

ナル定差方程式デアルガ，$\overset{x}{\underset{p}{E}} F$ ハ特殊ノ線状可遷作用子デアリ (1), (2), ……, (6) ノ事實ノ成立ニ必要ナコトハ，線状ト可遷トノミデアル。

11. *Bernoulli's polynomials* ノ擴張ニ關シテハ，以上ニ止メテ、§5 ニ掲ゲタ問題ニ立チ帰ル。

Nörlund ノ *Hauptlösung* ニ相當スルモノハ，如何ニ、一般ノ線状可遷作用子ニツイテ定義スベキカ？

Bochner ハ嘗ッテ、§10 ノ $\overset{x}{\underset{p}{E}} F(x)$ ニツイテコノ問題ヲ考ヘタコトガアル。ケレドモ，ソレノ特別ノ場合 $\Delta F(x)$ ナル作用子ニ於イテスラ、*Nörlund* ノ定義ト一致シタモノヲ得テ居ラズ，氏自ラ、*Speziallösung* ト呼バザルヲ得ナカッタ。(*Acta Math. Bd.* 51) 若干ノ條件ヲモッタ線状可遷作用子ニツイテ、*Spezial lösung* ヲ定義スルコトハ何ノ困難モナイ (§ 12 参照)。又、前出ノ *Ghermanesco* モ，同様ナ問題ヲ取扱ヒ，與ヘラレタ函數方程式

$$\overset{x}{\underset{p}{E}} F(x) = g(x)$$

ニ對シテ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (E - A_0)^{(n)} e^{-\eta x} g(x) \qquad (A_0 \lambda = -1)$$

ガ $\eta \downarrow 0$ ノトキニモ存在スレバ，コレヲ以テ *solution principale* ト定義シ．Nörlund ノ進ンダ道ヲ行ケルト書イテ居ル。然シナガラ、上ノ級數ハ，ソノ特別ノ場合 $\Delta F(x)$ ニツイテ見ルニ，決シテ Nörlund ノ定義ト一致シテ居ラナイ。

更ニ昨年，C. R. (Paris) デ Delsarte ノ論ジテ居ル線狀可遷作用子 $\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{K}(t)\,dt$ —— 但シ $\mathrm{K}(t)$ ハ〔0, 1〕デ有界変分ノ函數 —— ノ所論ニ於イテモ，（簡單ナ敍述デ委曲ハ知リ得ナイが），Bochner ノ Spezial-lösungen ニ相當シタモノシカ得テ居テナイト思ハレル。

即チ．他ニ參考スベキ文獻がアルカモ知レナイが，以上ノ所デハ，Nörlund ノ Hauptlösung ニ相當スベキモノが，以上ノ如キ特別ノ線狀可遷作用子ニツイテスラ、與ヘラレテ居ラナイヤウニ思ハレル。シカシ、コレハ是非成シ遂ゲネバナラヌコトデアル。

尚，Ghermanesco ハ，Hurwitz，Guichard ノ古典的結果ヲ拡張シテ居ル，コレヲ、吾々ノ場合ニ拡張スルコトハ出來ル。コヽデモ整函數 $G(\lambda)$ ノ behaviour ニ

関スル智識ガ出発点ニナル。（§13参照）

本節以下デ申シ上ゲルコトニ関シテハ特ニ，諸賢ノ御教示ヲ得タイト思ヒマス。

——（續ク）——