244. 代數方程式ノ根ノ絶對値ニツイテ

角 谷 靜 夫 (阪大)

高橋氏ハ n 次ノ代數方程式

$$(p_0+iq_0)x^n+(p_1+iq_1)x^{n-1}+\cdots\cdots+(p_n+iq_n)=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

(p, q ハ實數トス) ノ根ノ絶對値ハ

$$\left.\begin{array}{l} p_0 \geqq p_1 \geqq \cdots\cdots \geqq p_n \geqq 0 \\ q_0 \geqq q_1 \geqq \cdots\cdots \geqq q_n \geqq 0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

ナルトキ $\sqrt{2}$ ヲ超ヘナイコトヲ證明サレタ。

コレニ關シテ次ノ定理ガ成立スル。

定理 條件 (2) ヲ滿足スル n 次ノ代數方程式 (1) ノ根ノ絶對値ノ上限 ρ_n ハ

$$\mathcal{R}\left(\frac{x^{n+1}-x^k}{x^{n+1}-x^l}\right)=0 \qquad 0 \leqq k, l \leqq n \quad \cdots\cdots(3)$$

ヲ滿足スル x ノ絶對値ノ上限ニ等シイ。

$\frac{1}{x}=\xi$ トオケバコレハ又

$$\mathcal{R}\left(\frac{1-\xi^{k'}}{1-\xi^{l'}}\right)=0 \qquad 1 \leqq k', l' \leqq n+1 \quad \cdots\cdots(4)$$

ヲ滿足スル ξ ノ絶對値ノ下限ノ逆數ニ等シイ。

證明: (1) ハ $x=1$ ナル根ヲ持タナイカラ (1) ノ兩辺ニ $(x-1)$ ヲ乘ジ

$$\left.\begin{aligned} a_m &= p_m - p_{m+1} \\ b_m &= q_m - q_{m+1} \end{aligned}\right\} \qquad m = 0, 1, \cdots\cdots, n-1$$

$$a_n = p_n,\ b_n = q_n$$

トオケバ

$$a_m \geqq 0,\ b_m \geqq 0 \qquad m = 0, 1, \cdots\cdots, n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$(a_n + ib_n)(x^{n+1} - 1) + (a_{n-1} + ib_{n-1})(x^{n+1} - x) + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + (a_0 + ib_0)(x^{n+1} - x^n) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

トナル。

$$0 \leqq \mathrm{Arg}\,(a_m + ib_m) \leqq \frac{\pi}{2}$$

デアルカラ (6) ガ成立スルタメニハ少クトモアル一組ノ

k, l ($0 \leqq k, l \leqq n$) ニ對シテ

$$\frac{3\pi}{2} \geqq \mathrm{Arg}\left(\frac{x^{n+1} - x^k}{x^{n+1} - x^l}\right) \geqq \frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

即チ

$$\mathcal{R}\left(\frac{x^{n+1} - x^k}{x^{n+1} - x^l}\right) \leqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

デナケレバナラナイ。

何者, 若シサウデナケレバアル $\theta = \theta_0$ ニ對シテ

$$\theta_0 \leqq \mathrm{Arg}(x^{n+1} - x^{n-m}) \leqq \theta_0 + \frac{\pi}{2} - \delta,\ \delta > 0$$
$$m = 0, 1, \cdots\cdots, n$$

トナル。コレヨリ

$$\theta_0 \leqq \mathrm{Arg}\left\{(a_m + ib_m)(x^{n+1} - x^{n-m})\right\} \leqq \theta_0 + \pi - \delta,\ \delta > 0$$
$$m = 0, 1, \cdots\cdots, n$$

トナリ Vector ノ性質ヨリ (6) ガ成立シナイコトガワカル。

逆ニ少クトモ一組ノ $k, l\ (0 \leqq k, l \leqq n)$ ニ對シテ(8)、シタガツテ(7)ガ成立スレバ（必要アレバ k, l ヲ入レカヘルコトニヨリ

$$\pi \geqq \mathrm{Arg}\left(\frac{x^{n+1}-x^{k}}{x^{n+1}-x^{l}}\right) \geqq \frac{\pi}{2}$$

トナルカラ

$$a_l + i b_l = 1 \qquad (\text{即チ } a_l = 1,\ b_l = 0)$$

$$a_k + i b_k = -\frac{x^{n+1}-x^{l}}{x^{n+1}-x^{k}}$$

$$a_m + i b_m = 0 \qquad (m \neq l,\ m \neq k)$$

トオケバ(5),(6)ハ明カニ満足サレテヰル。從ツテ

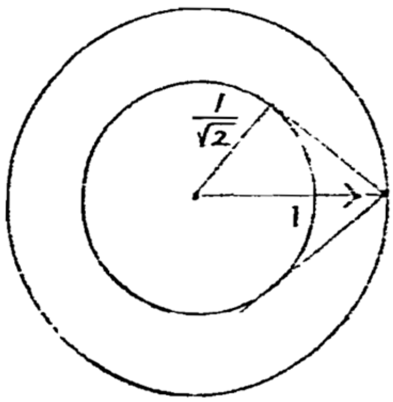
$$p_m = a_m + a_{m+1} + \cdots\cdots + a_n$$

$$q_m = b_m + b_{m+1} + \cdots\cdots + b_n$$

トオケバ(1),(2)ガ満足サレル。

(8)ヲ満足スル x ノ絶對値ノ上限ハ(8)ノ不等号ヲ除イテ(3)ノ形ニシテモ同ジデアルカラ定理ハ証明セラレタ。

注意：條件(4)ハ $(n+1)$ 個ノ点 $\xi^m\ (m=1,2,\cdots\cdots,n+1)$ ガ頂点ヲ1ニモツ直角ヨリ小サイ角ノ内部ニハイラナイコトヲ表ハス。



円 $|\xi| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ハ1ヲ頂点ニモツ直角内ニアルカラ高橋氏ノ定理ハコノ考ヘヨリモ直ニ得ラレル。

次ニ(4)ニヨツテ ρ_2 ヲ求メテ見ヨウ。

$k'>l'$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。$\xi=re^{i\theta}$ トオク。

1° $(k'=2,\ l'=1)$ $\quad \Re\left(\frac{1-\xi^2}{1-\xi}\right)=\Re(1+\xi)$ コレハ $|\xi|<1$ ニテ 0 トナラナイ。

2° $(k'=3,\ l'=1)$ $\quad \Re\left(\frac{1-\xi^3}{1-\xi}\right)=\Re(1+\xi+\xi^2)=1+r\cos\theta$

$$+r^2\cos 2\theta=\left(\sqrt{2}\,r\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{7}{8}-r^2\right)$$

コレハ $r=\sqrt{\frac{7}{8}}$, $\cos\theta=-\frac{1}{4r}$ ナルトキニ 0 トナリソレヨリ小サイ r ニ對シテ 0 トナラナイ。

3° $(k'=3,\ l'=2)$ $\quad \Re\left(\frac{1-\xi^3}{1-\xi^2}\right)=\Re\left(\xi+\frac{1}{1+\xi}\right)$

$$=\frac{1+2r\cos\theta+2r^2\cos^2\theta+r^3\cos\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}$$

コノ場合ハ

$$F(r,\alpha)\equiv 1+2r\alpha+2r^2\alpha^2+r^3\alpha=0 \qquad |\alpha|\leqq 1$$

ヲ満足スル正根 r ノ下限ヲ求ムレバヨイ。

$$F(r,\alpha)=\left(\sqrt{2}\,r\alpha+\frac{2+r^2}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{4-4r^2-r^4}{8}$$

デアルカラ

$0<r<2-\sqrt{2}$ ナルトキハ

$$\min_{|\alpha|\leqq 1} F(r,\alpha)=F(r,-1)=(1-r)(1-r+r^2)>0$$

$2-\sqrt{2}\leqq r\leqq 1$ ナルトキハ

$$\min_{|\alpha|\leqq 1} F(r,\alpha)=F\left(r,-\frac{2+r^2}{4r}\right)=\frac{4-4r^2-r^4}{8}$$

コレヲ$\leqq 0$ナラシメル最小ノrハ

$$r=\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

デアル。

$$\sqrt{\frac{7}{8}}>\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

デアルカラ

$$\rho_2=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}=1.1\text{弱}$$

トナル。

實際

$$(1+i\sqrt{4\sqrt{2}-5})x^2+(1+i\sqrt{4\sqrt{2}-5})x+1=0$$

ハ　$x=-\dfrac{1+i\sqrt{4\sqrt{2}-5}}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}\left(|x|=\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}\right)$ヲ根ニ持ツ。