251. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, IV

福原満洲雄（北大）

今迄述ベタ所ニヨリ局部的ナ問題, 即チ y ガ取ル値ヲ極ク狭イ範囲ニ限ッテ, 其ノ範囲ニ於ケル解ノ行動ヲ調ベルトイフ問題ヲ取扱フ方針ハ立ッタ. 此等ノ局部的ノ研究ヲ組合セテ y ガ取ル値ニ関スル制限ヲ取除クノガ最後ノ目標デアル. 局部的ナ問題ハ未ダ全部取扱ハレテ居ナイガ, 特殊ナ例ダケカラハ, コレダケデ全部ノ場合ヲ盡スト結論スルコトハ出來ナイカラ, コレカラハ一般ノ方程式ヲ扱ヒ, 局部的ナ研究ハ必要ニ應ジテ行フコトニシヨウ。

§1. 簡單ノ爲

$$\text{(A)} \qquad x\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

ニ於テ P, Q ハ共通ナ因子ヲ含マナイ x, y ノ整多項式デ, ソレヲ x, y ノ昇冪ニ整頓シテ書イタモノヲ

$$P(x,y) = a_0(x) + a_1(x)y + \cdots\cdots + a_p(x)y^p$$

$$Q(x,y) = b_0(x) + b_1(x)y + \cdots\cdots + b_q(x)y^q$$

$$a_j(x) = a_j x^{m_j} + \cdots\cdots$$

$$b_k(x) = b_k x^{n_k} + \cdots\cdots$$

トスル。 $a_j(x) \equiv 0$ ナラバ $m_j = +\infty$, $b_k(x) \equiv 0$ ナラバ $n_k = +\infty$ トスル。m_j ガ有限ナラバ $a_j \neq 0$, n_k ガ有限ナラバ $b_k \neq 0$ トスル。

(1) $m_j - jp \qquad (j=0,1,\cdots\cdots,p)$

ノ中ニ最小ノモノガ二ツ又ハソレ以上アル時 ρ ヲ P-order,

(2) $n_k - (k+1)\rho \qquad (k=0,1,\cdots\cdots,q)$

ノ中ニ最小ノモノガ二ツ又ハソレ以上アルトキ ρ ヲ Q-order, (1), (2) ノ中ニ最小ノモノガ二ツ又ハソレ以上アルトキ ρ ヲ R-order ト呼ブコトニスル。研究ノ方針ハ $(-\infty, +\infty)$ ヲ P-order, Q-order, R-order ヲ含マナイ區間ト其レ等ヲ含ム小サナ區間トニ分ケ, ソノ各區間 (ρ', ρ'') ニ對シテ

(3) $0 < x < \delta, \qquad Mx^{-\rho'} \leqq |y| \leqq \Delta x^{-\rho''}$

ナル範囲ニ於ケル解ノ行動ヲ調ベテ, 其等ノ結果ヲ結合シテ最後ノ結論ヲ引出サウトイフノデアル。

§2. 先ヅ最初ニ最モ簡單ナ場合即チ $\rho' < \rho < \rho''$ デアルヤウナ ρ ハ P-order デモ, Q-order デモ, R-order デモナイ場合ヲ考ヘル。從ツテ (1) ノ中ニ最小ノモノガ唯一ツアリ, (2) ノ中ニモ最小ノモノガ唯一ツアリ, 其レ等ヲ $m_\alpha - \alpha\rho$, $n_\beta - (\beta+1)\rho$ トスレバ

(4) $m_\alpha - \alpha\rho \neq n_\beta - (\beta+1)\rho$

デアル。ρ', ρ'' ハ P-order, Q-order 或ハ R-order ニナツテモ構ハナイ、正ノ數 ε ガ與ヘラレタトキ正ノ數 δ, Δ ヲ十分ニ小サク, 正ノ數 M ヲ十分ニ大キク取レバ

$$(5) \qquad \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{a_\alpha}{b_\beta} x^{m_\alpha - n_\beta} y^{\alpha-\beta} \left[1 + f(x,y)\right]$$

ト書イタ時 (3) デ

$$(6)\qquad |f(x,y)| \leqq \varepsilon$$

ガ成立スル．ソコデ (A) ト

$$(\mathrm{A}_1)\qquad x\frac{dy}{dx}=Ax^{m_\alpha-n_\beta}y^{\alpha-\beta}\qquad\left(A=\frac{a_\alpha}{b_\beta}\right)$$

ト比較スルトイフ考ヘガ起ル。併シ直接ニ (A), (A_1) ヲ比較スルヨリ，$y=x^{-\rho}z$ ト置イテ得ラレル

$$(\mathrm{B})\qquad x\frac{dz}{dx}=x^{\rho}\frac{P(x,x^{-\rho}z)}{Q(x,x^{-\rho}z)}+\rho z$$

ト，共ノ主部カラ成ル方程式ヲ比較スル方ガ都合ガヨイコトモアル。

$$\sigma=\beta-\alpha+1,\quad \mu=m_\alpha-n_\beta$$

ト置ケバ (B) ノ右辺ノ主部ハ $\mu+\sigma\rho$ ガ正ナラバ ρz，負ナラバ $Ax^{\mu+\sigma\rho}z^{\alpha-\beta}$ トナルカラ場合ニヨッテ (B) ト比較スル方程式トシテ

$$(\mathrm{B}_1)\qquad x\frac{dz}{dx}=\rho z$$

ヲ取ルコトモアリ，

$$(\mathrm{B}_2)\qquad x\frac{dz}{dx}=Ax^{\mu+\sigma\rho}z^{\alpha-\beta}$$

ヲ取ルコトモアルワケデアル。故ニ σ, μ, $\mu+\sigma\rho$ ノ符号ニヨッテ場合ヲ分ケナケレバナラナイ。

$\sigma<0$ ナラバ $y=\frac{1}{z}$ ト置キ z ノ方程式ヲ考ヘレバ

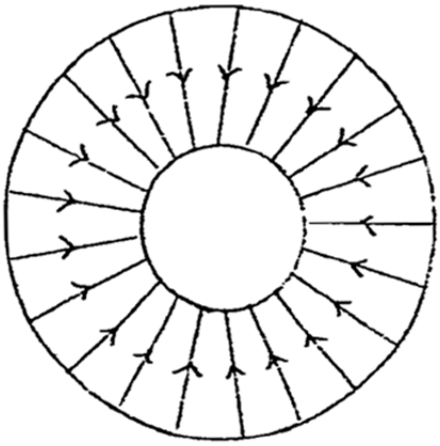
$\sigma>0$ トナルカラ $\sigma<0$ ノ場合ハ考ヘナイデヨイ。$\sigma=0$, $\mu=0$ ハ假定(4)ニ反スルカラ此ノ場合モ考ヘナイデヨイ。$\mu>0$, $\rho'\leqq 0\leqq\rho''$ ナラバ(A)ノ右辺ガ x ヲ因子ニ含ムコトニナリ $x=0$ ハ眞性超越点トナラナイカラ此ノ場合モ考ヘナイデヨイ。

§3. 殘ツタ場合ニツイテ結論ヲ表示スレバ次ノヤウニナル。

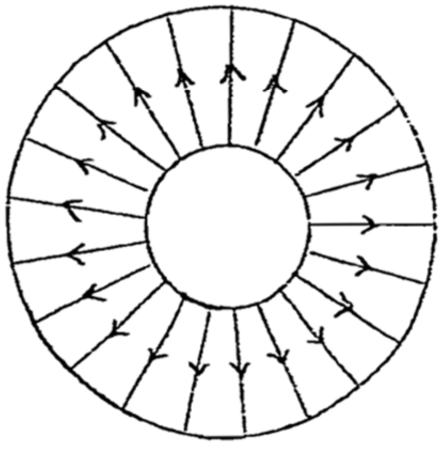
σ	μ	$\mu+\sigma\rho$	型
+	−	+	A
+	−	−	B′
+	0	+	A 但シ $\mu+\sigma\rho'>0$ トスル.
+	0	−	B′
+	+	+	$\rho'>0$ ナラバ A $\rho''<0$ ナラバ A′
+	+	−	B′
0	−	−	$R(a_\alpha/b_\beta)>0$ ナラバ A $R(a_\alpha/b_\beta)<0$ ナラバ A′
0	+	+	$\rho'>0$ ナラバ A $\rho''<0$ ナラバ A′

A 型ノ場合ニハ初期條件 (x_0, y_0) ガ(3)ヲ満足スルナラバ $x\to+0$ ノトキ或所デ必ズ $|y|=Mx^{-\rho'}$ トナル。A′ 型ノ場合ニハ初期條件 (x_0, y_0) ガ(3)ヲ満足スルナラバ

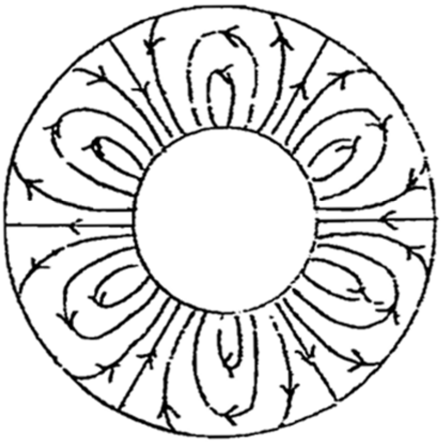
$x\to+0$ ノトキ或所デ必ズ $|y|=\Delta x^{-\rho''}$ トナル。B, B'型ノ場合ニハ初期條件 (x_0, y_0) ガ (3) ヲ満足スルナラバ $x\to+0$ ノトキ或所デ $|y|=Mx^{-\rho'}$ 又ハ $|y|=\Delta x^{-\rho''}$ トナル。B型ノ場合ニハ $|y|=Mx^{-\rho'}$ トナルノガ普通デ，B'型ノ場合ニハ $|y|=\Delta x^{-\rho''}$ トナルノガ普通デアル。(最モ扱ヒ易イ場合デアルカラ証明ハ省略シタ)



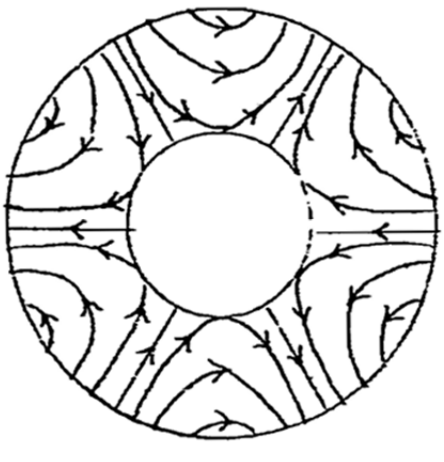
A型



A'型



B型 $(\sigma=-3)$



B'型 $(\sigma=3)$

圖ハ $x\to+0$ ノトキ点 $x^{\rho}y$ ガ描ク曲線ヲ近似的ニ表ハシタモノデアル。 $y=\frac{1}{z}$ ナル変換デ A, B型ハ夫々 A', B'型ニ，逆ニ A', B'型ハ夫々 A, B型ニナル。