254. 代數方程式ノ根ノ絕對値ニツイテ, II

角 谷 靜 夫（阪大）

244 ニ於テ述ベタコトヨリ

$$\rho_1 \leqq \rho_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \rho_n \leqq \rho_{n+1} \leqq \cdots\cdots \leqq \sqrt{2}$$

$$\rho_1 = 1, \qquad \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-2}} = 1.098 \cdots\cdots$$

ナルコトガワカッタ。今

$$\lim_{n=\infty} \rho_n = P$$

トオケバ、コレハ 244 ノ條件 (2) ヲ滿足スルアラユル代數方程式（$n = 1, 2, \cdots\cdots$）ノ根ノ絕對値ノ上限デアル。コノ P ノ大キサヲ求メルノガ今回ノ目的デアル。

先ヅ

$$\rho_n = P \qquad n \geqq 6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

即チ　$\rho_6 = \rho_7 = \rho_8 = \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$

ナルコトヲ示サウ。

コノタメニ

$$\Re\left(\frac{1-\xi^k}{1-\xi^l}\right)=0 \qquad k>l \quad \cdots\cdots\cdots (11)$$

ヲ満足スルξノ絶對値ノ下限ヲ$r_{k,l}$トオク。

$$\frac{1}{\rho_n}=\min_{1\leqq k,\, l\leqq n+1} r_{k,l} \quad \cdots\cdots\cdots (12)$$

デアル。

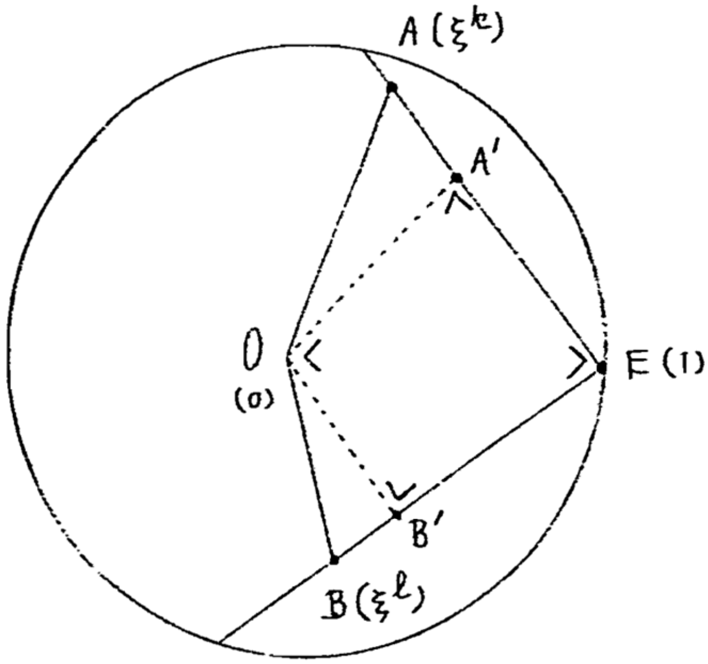
前号ノ結果ヨリ

$$\left.\begin{aligned} &r_{2,1}=1, \quad r_{3,1}=\sqrt{\frac{7}{8}}=0.9354 \\ &r_{3,2}=\sqrt{2\sqrt{2}-2}=0.9101 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

ガ得ラレル。

(11)ハ右ノ圖ニ於テ$AE\perp BE$ナルコトヲ意味スルカラOヨリAE, BEニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々A', B'トスレバ

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2\geqq\overline{OA'}^2+\overline{OB'}^2=1$$



トナル。即チ

$$r_{k,l}^{2k}+r_{k,l}^{2l}\geqq 1 \quad \cdots\cdots\cdots (14)$$

コレヨリ，例ヘバ

$$\left.\begin{aligned} &r_{4,1}>0.8411 \\ &r_{5,1}>0.8689 \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} r_{6,1} &> 0.8820 \\ r_{7,1} &> 0.8924 \end{aligned}\right\} \text{-----------------} (15)$$

ヲ得ル。

一方(11)ニ於テ $k=5,\ l=1$ トオケバ

$$\Re(1+\xi+\xi^2+\xi^3+\xi^4)=0$$

$\xi=re^{i\theta},\ \theta=\frac{\pi}{3}$ トオケバ

$$1+\frac{r}{2}-\frac{r^2}{2}-r^3-\frac{r^4}{2}=0 \text{ ---------} (16)$$

$r=0.898$ ニ對シ(16)ノ左辺ハ <0 トナルカラ $r_{5,1}<0.898$

ナルコトガワカル。

然ルニ

$$(0.898)^6+(0.898)^8<1$$

$$(0.898)^4+(0.898)^{10}<1$$

$$(0.898)^2+(0.898)^{16}<1$$

デアルカラ(14)ヲ用フレバ

$$r_{p,q}>0.898>r_{5,1} \text{ ---------------} (17)$$

ガ $p\geqq 4,\ q\geqq 3$; $p\geqq 5,\ q\geqq 2$; 又ハ $p\geqq 8,\ q\geqq 1$

ニ對シテ成立スル。

故ニ(13)及ビ $r_{4,2}=\sqrt{r_{2,1}}=1$ ナルコトニ注意スレ

バ

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{\rho_6}=\min(r_{4,1},\ r_{5,1},\ r_{6,1},\ r_{7,1})$$

ナルコトガワカル。

次ニ更ニ精密ニ

$$\frac{1}{P}=\min(r_{5,1},\ r_{6,1},\ r_{7,1}) \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

ナルコトヲ示サウ。コノタメニハ $r_{4,1}>0.898$ ナルコトヲ示セバヨイ。ソレニハ

$$\mathcal{R}(1+\xi+\xi^2+\xi^3)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

ガ $|\xi|\leqq 0.9$ ニテハ成立シナイコトヲ示セバ十分デアル。

$\xi=re^{i\theta}$ トオケバ (19) ハ

$$F(r,\theta)\equiv 1+r\cos\theta+r^2\cos 2\theta+r^3\cos 3\theta=0$$

$\cos\theta=\alpha$ トオケバ

$$\begin{aligned} F(0.9,\theta)\equiv f(\alpha)&\equiv 1+0.9\alpha+0.81(2\alpha^2-1)\\ &\qquad +0.729(4\alpha^3-3\alpha)\\ &=2.916\alpha^3+1.62\alpha^2-1.287\alpha+0.19 \end{aligned}$$

コレノ $|\alpha|\leqq 1$ ニ於ケル最小値ガ >0 ナルコトヲ云ヘバヨイ。

先ヅ極小値ヲ求メル。α^3 ノ係數ハ正デアルカラ

$$f'(\alpha)\equiv 8.748\alpha^2+3.24\alpha-1.287=0$$

ノ根ノウチ大キイ方

$$\alpha_1=\frac{13}{54}$$

ニ對スル $f(\alpha)$ ノ値

$$f\left(\frac{13}{54}\right)=\frac{398}{27000}=0.01474\cdots\cdots$$

ガ極小値デアル。

$$f(-1)=0.181>0,\quad f(1)=3.439>0$$

デアルカラ証明ハ完結スル。

結局(15),(17),(18)ヨリ次ノ結果ヲ得ル。

$$0.8689 < \frac{1}{P} < 0.898$$

又ハ

$$1.1135 < P < 1.1509$$