258. ぼれる集合論ニ於ケル分離ノ原理ニ就テ

酒 井 欣 雄（北大）

分離ノ原理ハ解析集合論ニ於ケル最モ基本的ナ定理ノ一ツデアル。コノ原理ハ最近 *Novikoff, Liapounoff* 及 *Lusin* 等ニヨリ "*separabilité multiple*"（定義ノ参照）ノ場合ニ拡張サレタ。然ラバ，*Borel* 集合論ニ於ケル分離ノ原理ガ同様ノ拡張ヲ許スカドウカ？——ニ就イテ *Sierpiński: Sur la separabilité multiple des ensembles mesurables* B. Fund, Math. *t.* 23 *pp.* 292—303 ニ於テソノ大部分ハ肯定的ノ結

果ガ與ヘラレタ。然シ可附番無限ノ場合ノ第二分離ノ原理(ボレル集合論ニ於ケル)(定義2参照)ハ同氏ニヨツテモ取扱ハレズ、尚ソノ上, 同論文ノ終リ及ビ *Ruziewicz: Sur la séparabilité multiple des ensembles, Fund. Math. t. 24, pp. 199—205* ノ初メニ, カカル場合ヘノ拡張ハ不可能デアルト云ツテイル。之レハ何カノ誤解デアラウ。(多分 *Liapounoff Dis* ノ條件ノ下ニテ不可能デアルト云フ意味デアラウ)。何トナレバ, 以下証明スルヤウニ, コノ場合ヤハリ定理ハソノママ成立スルカラデアル。

定義1.

点集合Kノ部分集合ノ集合ヲ亜トスル。

1°. *Lusin* ノ第一分離ノ原理: $E_1, E_2 \in$ 亜, $E_1 E_2 = 0$ ナルトキ, $H_1, H_2, K-H_1, K-H_2 \in$ 亜, $H_1 \supset E_1$, $H_2 \supset E_2$, $H_1 H_2 = 0$ ナル H_1, H_2 ガ存在スル。

2°. *Novikoff* ノ分離: $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_m \in$ 亜, $E_1 \cdots\cdots E_m = 0$ ナルトキ $H_1, \cdots\cdots, H_m$ ガ存在シテ, H_i, $K-H_i \in$ 亜, $H_i \supset E_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, m)$, $H_1 H_2 \cdots\cdots H_m = 0$ トナル。

3°. *Liapounoff* ノ分離: $E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots \in$ 亜 (可附番無限個)., $E_1 E_2 E_3 \cdots\cdots = 0$ ニ對シテ $H_1, H_2, H_3, \cdots\cdots$ ガ存在シテ H_i, $K-H_i \in$ 亜, $H_i \supset E_i$, $(i=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ 且ツ $H_1 H_2 H_3 \cdots\cdots = 0$ トナル。

4°. *Liapounott* ノ *bis* 分離： $E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots \in \mathfrak{E}$, $\lim E_m = 0$ ニ對シテ $H_1, H_2, H_3, \cdots\cdots$ ガ存在シテ，H_i, $K - H_i \in \mathfrak{E}$, $H_i \supset E_i$, $(i = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ 且シ $\lim H_m = 0$ トナル。

定義 2.

1°. *Lusin* ノ第二分離原理： $E_1, E_2, \in \mathfrak{E}$ ニ對シテ，H_1, H_2 ガ存在シテ，$K - H_1$, $K - H_2 \in \mathfrak{E}$, $H_1 \supset E_1 - E_2$, $H_2 \supset E_2 - E_1$, $H_1 H_2 = 0$ トナル。

2°. *Lusin* ノ第二分離原理ノ拡張： $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_m \in \mathfrak{E}$ ニ對シテ，$H_1, H_2, \cdots\cdots, H_m$ ガ存在シテ $K - H_i \in \mathfrak{E}$, $H_i \supset E_i - (E_1 E_2 \cdots\cdots E_m)$, $(i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ 且 $H_1 H_2 \cdots\cdots H_m = 0$ トナル。

3°. 可附番無限ノトキノ第二分離原理： 可附番無限個ノ $E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots \in \mathfrak{E}$ ニ對シテ $H_1, H_2, H_3, \cdots\cdots$ ガ存在シテ，$K - H_i \in \mathfrak{E}$, $H_i \supset E_i - (E_1 E_2 E_3 \cdots\cdots)$, $(i = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ 且ツ $H_1 H_2 H_3 \cdots\cdots = 0$ トナル。

定理. *Metric space* ニ於テ $\mathfrak{E}$ ヲ α $(1 \leqq \alpha < \Omega)$ 次ノ *multiplicative* ノ *Borel* 集合トスル。コノ $\mathfrak{E}$ ニツイテ可附番無限ノ場合ノ第二分離原理ガ成立スル。尚，同時ニ $E_1 E_2 \cdots\cdots = 0$ ナラバ *Liapounott* ノ分離原理ガ成立スル。

証明.

$\mathfrak{E}$ ヲ α 次ノ *ambigu* ノ *Borel* 集合トスルト，$\mathfrak{E}$ ハ

Körpert ナルノデ, $\mathfrak{A}$ ヲ *Körper* トシ, $\mathfrak{A}_\delta \ni E_1, E_2, \cdots\cdots$ ノトキ. $\mathfrak{A}_\sigma \ni H_1, H_2, \cdots\cdots$ ガ存在シテ與ヘラレタ性質ヲモチ, 且ツ $E_1 E_2 E_3 \cdots\cdots = 0$ ナラバ, 此処ニ與ヘタ $H_1, H_2, \cdots\cdots$ ハ同時ニ $\in \mathfrak{A}_\delta$ トナルコトヲ証明スル。

H_i ニツキ —— $\mathfrak{A}_\delta$ ヲ $E_1, E_2, \cdots\cdots$ ナルコトト, $\mathfrak{A}$ ガ *Körper* ナルコトニヨリ

$E_i = E_i^1 E_i^2 E_i^3 \cdots\cdots$, $E_i^u \supset E_i^{u+1}$, $E_i^u \in \mathfrak{A}$, $i, u = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ トシテヨイ。コノトキ

$$F_i^u = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} E_j^u$$

トオク。コノトキ, F_i^u ハ $F_i^u \in \mathfrak{A}$, $F_i^u \supset F_i^{n+1}$, トナル。扨テ

(1) $H_i = E_i^1 (K - F_i^1) + E_i^2 (F_i^1 - F_i^2) + \cdots\cdots$ トスル.

之レガ求メル H_i, $i = 1, 2, \cdots\cdots$, デアル。

Klass ニツキ.—— $\mathfrak{A}$ ハ *Körper* ナルユエ (1) ノ右辺ノ各項ハ $\mathfrak{A}$ ニ属ス. ヨッテ $H_i \in \mathfrak{A}_\sigma$、即チ $K - H_i \in \mathfrak{A}_\delta$.

$E_1 E_2 E_3 \cdots\cdots = 0$ (之ハ $\in \mathfrak{A}_\sigma \mathfrak{A}_\delta$) ノトキハ

$K \supset E_i^1 \supset E_i^1 F_i^1 \supset E_i^2 F_i^1 \supset E_i^2 F_i^2 \supset \cdots\cdots \supset (E E^2 E^3 \cdots\cdots) = 0.$ ナルユエ. (次ノ※参照)

$K - H^i = (K - E_i^1) + F_i^1 (E_i^1 - E_i^2) + F_i^2 (E_i^2 - E_i^3) + \cdots\cdots$ コノ式ノ右辺ノ各項ハ $\mathfrak{A}$ ニ属スルカラ. $K - H^i \in \mathfrak{A}_\sigma$ ヨッテ $H^i \in \mathfrak{A}_\delta$

$H_i \supset E_i - (E_1 E_2 \cdots\cdots)$ ニツイテ —— $E_i^n \supset E_i$, $E_i^n \supset E_i^{n+1}$

及ビ $F_i^n \supset F_i^{n+1}$ ヲ用ヒテ (1) ヨリ

$$H_i \supset E_i(K-F_i^1)+E_i(F_i^1-F_i^2)+\cdots\cdots$$

$$=E_i\left[K-(F_i^1F_i^2F_i^3\cdots\cdots)\right]$$

$$=E_i-E_i\times(F_i^1F_i^2F_i^3\cdots\cdots)$$

$$=E_i-(E_1^1E_1^2E_1^3\cdots\cdots) \quad ※$$

$$(E_2^1E_2^2E_2^3\cdots\cdots) \qquad E_i\times F_i^1F_i^2\cdots\cdots$$

$$(\quad E_3^2E_3^3\cdots\cdots) \qquad =E_1E_2E_3\cdots\cdots$$

$\cdots\cdots$ トナルコト.

$\cdots\cdots$

$$(E_i^1E_i^2\cdots\cdots E_i^{i-1}E_i^i\cdots\cdots)$$

$$=E_i-(E_1^1E_1^2E_1^3\cdots\cdots)$$

$$(E_2^1E_2^2E_2^3\cdots\cdots)$$

$$(E_3^1E_3^2E_3^3\cdots\cdots)$$

$\cdots\cdots$

$$(E_i^1E_i^2E_i^3\cdots\cdots)$$

$\cdots\cdots$

$$=E_i-(E_1E_2E_3\cdots\cdots)$$

$H_1H_2H_3\cdots\cdots=0$ ニツイテ —— モシ $H_1H_2\cdots\cdots\neq 0$ ナラバ共通部分ニ一点 p ヲトル。$H_1\ni p$ ナルユエ, (1)式デ $i=1$ ニシテ見ルト、$n\geq 1$ ガ存在シテ $E_1^n(F_1^{n-1}-F_1^n)\ni p$.
但シ F_i^0, E_i^0 等ハ凡テ K ニトル。依ッテ

(2) $\quad E_1^n\ni p,\ F_1^{n-1}\ni p,\ F_1^n\not\ni p$

(2)ノ第一式ト $E_1^{n-1}\supset E_1^n$ トヨリ, $E_1^{n-1}\ni p$.

(2) ノ第二式ト F_1^{n-1} ノ定義ニヨリ $E_j^{n-1} \ni p$, $j=2, \cdots\cdots, n$, 依ッテ F_i^{n-1} ノ定義ニヨリ $F_i^{n-1} \ni p$, $i=1,2,3,\cdots\cdots$ 又 F_i^m ノ 単調性ニヨリ

(3) $F_i^0 \supset F_i^1 \supset F_i^2 \supset \cdots\cdots \supset F_i^{n-1} \ni p$, $i=1,2,3,\cdots\cdots$

(2) ノ第三式ニヨリ k ($k \leqq n+1$) ガ存在シテ $E_k^n \ni p$.

E_i^m ノ単調性ニヨリ

(4) $E_k^n \supset E_k^{n+1} \supset E_k^{n+2} \supset \cdots\cdots \ni p$

扨テ (1) ニヨリ

$$H_k = \sum_{m=1}^{n-1} E_k^m (E_k^{m-1} - F_k^m) + \sum_{m=n}^{\infty} E_k^m (F_k^{m-1} - F_k^m)$$

コノ式ノ右辺ノ第一項ハ (3) ニヨッテ p ヲ含マズ, 第二項ハ (4) ニヨッテ p ヲ含マズ. 依ッテ $H_k \ni p$. 之ハ p ノ定義ニ反スル。

依ッテ $H_1 H_2 H_3 \cdots\cdots = 0$ トナル。

(証明了)

尚上述ノ Rugiewicz ノ論文デハ,

亜ガ Ring デ Lusin ノ第二分離原理ガ成立スルトキハ、Lusin ノ第二分離原理ノ拡張 (定義 2, 2°) ガ成立スル。

トイフコトガ面白イ方法デ証明サレテキルガ、次ノ如ク Novikoff ノ証明法ニヨッテモ証明サレル。念ノタメ記シテオキマス。コノ方ガ遥カニ簡単デアルト思ヒマス。

証明.

$m=2$ ノトキハ，Lusin ノ第二分離原理デ、コレハ假定ニヨッテ成立スル。$(m-1)$ ケノトキ成立スルトキ m 個ノトキモ成立スルコトヲ示セバヨイ。

E_1, E_2 ニツキ，K_1, K_2 が存在シテ

$$K_1 \supset E_1-(E_1E_2), \quad K_2 \supset E_2-(E_1E_2)$$

$$K_1K_2=0, \quad K_1, K_2 \in \Phi_c$$

$(m-1)$ 個ノ (E_1E_2)，$E_3, \cdots\cdots, E_m$ ニツキ $L_0, L_3, \cdots\cdots, L_m$ が存在シテ

$$L_0 \supset (E_1E_2)-(E_1E_2\cdots\cdots E_m)$$

$$L_3 \supset E_3-(E_1E_2\cdots\cdots E_m), \cdots\cdots, L_m \supset E_m-(E_1E_2\cdots E_m)$$

$$L_0L_3\cdots\cdots L_m=0, \quad L_0, L_3, \cdots\cdots, L_m \in \Phi_c.$$

此処デ，$H_1=K_1+L_0$，$H_2=K_2+L_0$，$H_3=L_3, \cdots\cdots, H_m=L_m$ トスル。

Φ が Ring ナルユエ，Φ_c モ亦 Ring デアル。依ッテ H_1, H_2，及ビ $H_3, H_4, \cdots\cdots, H_m$ ハ凡テ $\in \Phi_c$.

$$H_1=L_0+K_1 \supset \big(E_1-(E_1E_2)\big)+\big((E_1E_2)-(E_1\cdots\cdots E_m)\big)$$

$$=E_1-(E_1\cdots\cdots E_m)$$

H_2 モ同様．$H_3, \cdots\cdots, H_m$ ハ $L_3, \cdots\cdots L_m$ ト同ジモノナルユエ、ソハリ同ジ様ナ式が成立スル。

$$H_1H_2\cdots\cdots H_m=(L_0+K_1)(L_0+K_2)L_3\cdots\cdots L_m$$

$$=L_0L_3\cdots\cdots L_m+K_1K_2L_3\cdots\cdots L_m=0$$

（以 上）

日本學士院記事（1934）第9号ノ功力先生ノ論文ニヨリ

マスト、任意ノ metric space ニ於ケル解析集合ハ Lusin ノ第二分離原理ヲ充スコトガ証明サレテイマスカラ、上ノ結果ヨリ次ノコトガ言ヘマス。

任意ノ metric space ニ於ケル解析集合 $E_1, E_2, \cdots\cdots E_m$ ニ對シテ、補解析集合 $H_1, H_2, \cdots\cdots, H_m$ ガ存在シテ

$$H_i \supset E_i - (E_1 E_2 \cdots\cdots E_m), \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, m$$

$$H_1 H_2 \cdots\cdots H_m = 0$$

トナル。