269. 高橋氏ノ定理ニ就イテ

龍 澤 周 雄（東大學生）

高橋氏ハ本誌第60号ニ於テ

$$f(x)=(p_0+iq_0)x^n+(p_1+iq_1)x^{n-1}+\cdots\cdots+(p_n+iq_n)=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} p_0\geqq p_1\geqq\cdots\cdots\geqq p_n\geqq 0 \\ q_0\geqq q_1\geqq\cdots\cdots\geqq q_n\geqq 0 \end{array}\right. \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ノ根ノ絶對値ハ $\sqrt{2}$ ヲ超ヘナイコトヲ示サレ，掛谷先生，角谷氏ニヨリ（1）ハ單位円ノ外ニモ根ガ存在シ得ルコトガ分リマシタ。

此ノ時單位円ノ外ニアルスベテノ根ノ絶對値ノ積モ尚ホ $\sqrt{2}$ ヲ超エヌコトガ言ハレ之ハ又高橋氏ノ定理ノ別証ニモナリマス。

（1）ニテ $a_0=p_0+iq_0,\ a_1=p_1+iq_1,\cdots\cdots\cdots,\ a_n=p_n+iq_n$

トオキ根ヲ $z_1, z_2,\cdots\cdots, z_n$ トシマス。

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)\,d\theta=\begin{cases}2\log r & r\geqq 1\\ 0 & 0\leqq r\leqq 1\end{cases}$$

ヲ利用スレバ

$$Max(1,|z_i|)=e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1-2|z_i|\cos\theta+|z_i|^2}\,d\theta}$$

$$=e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|e^{i\theta}-|z_i||\,d\theta}$$

$$\prod{}'|z_i| \leqq e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f(e^{i\theta})}{a_0}\right|d\theta}$$

Jensen ノ不等式ニヨリ

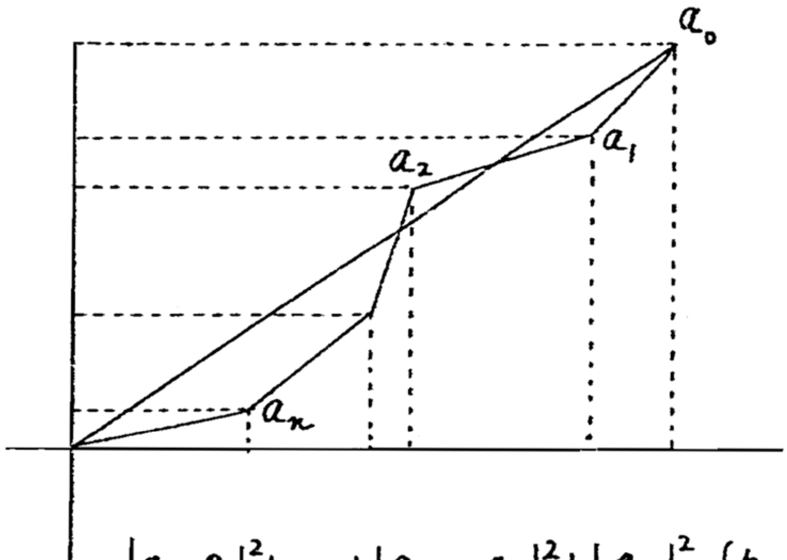
$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(e^{i\theta})}{a_0}\right|d\theta \leqq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(e^{i\theta})}{a_0}\right|^2 d\theta}$$

故ニ $\qquad \prod{}'|z_i| \leqq \dfrac{\sqrt{|a_0|^2+|a_1|^2+\cdots\cdots+|a_n|^2}}{|a_0|}$!!

（$\prod{}'$ ハ $|z_i| \geqq 1$ ノミヲ採用スル）

若シ(1)＝$(x-1)$ヲ乗ジタ方程式ニ関シテ上記考察ヲ行ヘバ

$$\prod{}'|z_i| \leqq \frac{\sqrt{|a_0|^2+|a_0-a_1|^2+\cdots\cdots+|a_{n-1}-a_n|^2+|a_n|^2}}{|a_0|} \cdots\cdots(3)$$



(2)ノ関係アル故 $a_0 a_1 \cdots\cdots a_n$ ヲ複素数平面上ニ圖示スレバ左圖ノ如クナリ。従ツテ

$$|a_0-a_1|^2+\cdots\cdots+|a_{n-1}-a_n|^2+|a_n|^2=(p_0-p_1)^2+\cdots\cdots+(p_{n-1}-p_n)^2+p_n^2$$

$$+(q_0-q_1)^2+\cdots\cdots+(q_{n-1}-q_n)^2+q_n^2$$

$$\leqq p_0^2+q_0^2=|a_0|^2$$

(3) ヨリ

$\prod{}'|z_i| \leqq \sqrt{2}$ ガ出マス。

之レヲ使ヘバ(1)ノ根ノ下限トシテ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{p_n+iq_n}{p_0+iq_0}\right|>\frac{p_n+q_n}{2(p_0+q_0)}$$

ヲ取レルコトガ分リマス。