274. 多項式ノ既約性ニ就テ

龍 澤 周 雄 (東大學生)

多項式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ノ係數ガスベテ整數デ

$$|a_1|>1+|a_2|+\cdots\cdots+|a_n| \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナラバ $f(x)$ ハ有理數体ニ於テ既約ニナルコトハ Perron ガ證明シタ。

(2) ヲ使ヘバ

$$\mathrm{Min}\left(\left|\frac{a_1}{a_2}\right|, \cdots\cdots \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right) > 2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ナラバ充分 $f(x)$ ハ既約ニナルコトガ分リマス。若シ $a_1, \cdots\cdots a_n$ ガスベテ正ノ整数デアルナラバ (2) ハ更ニ良クスルコトガ出來マス。

定理 $$\mathrm{Min}\left(\frac{a_1}{a_2}, \cdots\cdots \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) > 4^{\frac{1}{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

ナラバ (1) ハ既約ニナル。

証明 $\varphi(x) = a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n$

トオケバ $\varphi(x)=0$ ノ根ハ掛谷先生ノ定理ニヨリスベテ単位円ノ内部ニアリマス。次ニ

$$\varphi(x)\left(4^{\frac{1}{n}}x-1\right) = a_1 4^{\frac{1}{n}} x^n - \left(a_1 - a_2 4^{\frac{1}{n}}\right) x^{n-1} \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots - \left(a_{n-1} - a_n 4^{\frac{1}{n}}\right) x - a_n$$

$|x| = 1$ 上ニテ

$$\left(4^{\frac{1}{n}}+1\right)|\varphi(x)| \geqq a_1 4^{\frac{1}{n}} - \left(a_1 - a_2 4^{\frac{1}{n}}\right) \cdots\cdots - \left(a_{n-1} - a_n 4^{\frac{1}{n}}\right) - a_n$$

$$= (a_1 + \cdots\cdots + a_n)\left(4^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

(4) ヨリ

$$a_1 > a_n 4^{\frac{n-1}{n}}, \cdots\cdots a_{n-1} > a_n 4^{\frac{1}{n}}$$

従ッテ $|x| = 1$ 上ニテ

$$|\varphi(x)| > \frac{4^{\frac{1}{n}} - 1}{4^{\frac{1}{n}} + 1}\left(4^{\frac{n-1}{n}} + \cdots\cdots + 4^{\frac{1}{n}} + 1\right) a_n$$

$$= \frac{3a_n}{4^{\frac{1}{n}}+1} \geqq a_n \geqq 1 \qquad (n \geqq 2)$$

故ニ $|x|=1$ 上ニテ

$$\left| \frac{x^n}{a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n} \right| < 1$$

依ッテ Ronché ノ定理ニヨッテ $f(x)=0$ ノ根ハ単位円ノ内部ニ $n-1$ 個ノ根ヲ有スルコトニナリマス。若シ $f(x)$ が可約ナラバ次ノ様ニ整係数ノ多項式ノ積トシテ表ハサレル。

$$f(x) = (x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + b_m)(x^l + c_1 x^{l-1} + \cdots + c_l)$$

$$n = m + l$$

何レカ一方ノ多項式ノ根ハスベテ単位円ノ内部ニ入ルコトニナルが b_m, c_l が整数故之ハ不可能デアル。故ニ $f(x)$ ハ有理数体ニ於テ既約デアル。

$4^{\frac{1}{n}}$ ハソレ以下ニ出來ナイ、實際 x^2+2x+1 ハ可約デアルが $\frac{2}{1} = 4^{\frac{1}{2}}$ トナッテキル．シカシ此ノ場合ヲ除ケバ $4^{\frac{1}{n}}$ ハ 1 ニ出來ルノデハナイカト思ヒマスが如何ナモノデセウカ。

訂正：　「高橋氏定理ニ就テ」ニ於テ

$$\prod{}' |z_i| \leqq e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left| \frac{f(e^{i\theta})}{a_0} \right| d\theta} \text{ ハ } \leqq \text{ デナク } =$$

デス。

ソレハ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left| e^{i\theta} - |z_i| \right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left| e^{i\theta} - z_i \right| d\theta$

ヨリ明ラカ。錯覺ヲ起シテトンダ mistake ヲシマシタ。

ナホコノ方法ハ Pólya, Szegö ノ問題集 V. 196 參考。