276. Picard-Vessiot ノ理論ニ就テ. 5

吉　田　耕　作（阪大）

I. 前論 242 ニ述ベタコトハ結局

$$(1)\quad \frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+p_n(x)\,y=0=\mathrm{P}(y)$$

ノ Galois 群 $\|A\|$ ノ *reduzibilität (im Sinne von Gruppendarstellung)* ト (1) ノ因数分解トノ間ノ関係デアリ、之ヲ用ヒテ Vessiot ノ結果ヲ再証明シタ訳（前論定理 4′）デアッタ。

然ラバ $\|A\|$ ガ群表現ノ意味ニ於テ *vollreduzibel* ナラドウナルカ。コノトキハ

$$\|A\|=\begin{Vmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{Vmatrix}$$

トナル。コヽニ $\|B\|$, $\|C\|$ ハ夫々 m 次，$n-m$ 次行列デアル。

$$\begin{Vmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{Vmatrix}\approx\begin{Vmatrix} C' & 0 \\ 0 & B' \end{Vmatrix},\quad \|B\|\approx\|B'\|,\quad \|C\|\approx\|C'\|$$

(*äquivalent*)

デアル。ヨッテ前論定理 3 ヲ用フレバ

$$\mathrm{P}=\mathrm{S}\times\mathrm{Q}=\mathrm{Q}'\times\mathrm{S}'$$

ナル二通リノ因数分解可能デアル。コヽニ Q, S' ノ *Fundamental solutions* ハ夫々 $y_1, y_2, \cdots\cdots\cdots, y_m;\ y_{m+1},$

$y_{m+2}, \cdots\cdots, y_n$ ト考ヘテヨイ。

依ッテ $P=0$ ヲ解クコトハニツノ homogene ナ equation $Q=0$, $S'=0$ ヲ夫々 independent ニ解クコトヽ同等デアル。

前論定理3ニ於ケル case ($\|A\| = \left\|\begin{matrix} B & 0 \\ X & C \end{matrix}\right\|$ ノトキ) ハ先ヅ $Q=0$ ヲ解イテ $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m$ ヲ求メ, 次ニ $S=0$ ヲ解イテ $Y_{m+1}, \cdots\cdots, Y_n$ ヲ求メテカラ inhomogene ナ

$$Q(y_{m+1}) = Y_{m+1}, \quad Q(y_{m+2}) = Y_{m+2}, \cdots\cdots\cdots\cdots \cdots\cdots, Q(y_n) = Y_n$$

ヲ解カナケレバナラナカツタノデアル。

II. Example. $P(y)=0$ ノ adjungierte

$$(2) \quad \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(p_1 z) + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{d}{dx}(p_{n-1} z) + (-1)^n p_n z = 0$$

ノ Fundamental solutions ハ $P(y)$ ノソレカラ

$$z_k = \frac{\partial \log \Delta}{\partial y_k^{(n-1)}}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdots\cdots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \cdots\cdots & y_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & y_n' & \cdots\cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ニヨッテ求メラレル。ヨッテ前論定理Iヲ用フレバ (2) ノ Galois 群ハ $\|(A^{-1})'\|$ ニヨッテ與ヘラレルコトガワカル。ココニダッシユハ transponierte ヲ示ス。何者, 定理I

ニヨレバ此ノ Galois 群ハ $\|(A^{-1})'\|$ ノ M_n ニ於ケル fermeture デナケレバナラヌが之レが $\|(A^{-1})'\|$ ニ一致スルコトハ adjungierte トイフ性質が symmetric ナコトト $\|A\|$ が M_n ニ於ケル fermeture ト一致スルコトカラ分ル。

故ニ $\|A\| = \begin{Vmatrix} B & 0 \\ X & C \end{Vmatrix}$ ナラ $\|(A^{-1})'\| = \begin{Vmatrix} B' & X \\ 0 & C' \end{Vmatrix}$ ノ形. 特ニ $P(y)$ が selbst adjungierte ナラ $\|A\|$ ハ vollreduzibel デ上ノ所論が apply デキル。

III. $P(y)=0$ が rational operation デトケル爲ノ必充條件ハ Galois 群が Einheitsgruppe ナルコトデアル。

証明. rational integrable ト云フコトハ $R(y) \subseteq R$ ヲ意味スル。一方定義ニヨッテ $R(y) \supseteqq R$ ダカラ $R(y)=R$。ヨッテ $\|A\|$ ハ Einheitsgruppe デナケレバナラヌ。逆ニ $\|A\|$ が Einheitsgruppe ダッタラ $R(y)=R$ トナルカラ rational integrable.

Vessiot ハ algebraic integrability ヲ議論シテヰルケレドモ吾々ハ

1. 考ヘテヰル領域デ $y_1, y_2, \text{------}, y_n$ が meromorphic (一價)
2. Galois 群ヲ連結群ニトッタ

コノ二ツノ理由カラ議論が上ノ如ク甚ダ簡單ニナッタ譯デアル。元來 analytic function ヲ取扱ッテヰルノダカラ

適當ナ bereich デ考ヘテ Fundamentalsystem ガ一價ナ所デ議論スルノガ妥當デアリマセウ。