279. Linear translatable operators ニ就テ

泉　信一（東北大）
北川敏男（阪大）

サキニ，著者ノ一人（北川）ハ，Linear translatable operators ノ形ヲ決定スルノ必要ヲ本誌デ述ベタノデ、コノ問題ニ就イテ吾々ノ得タ結果ヲ述ベヨウト思フ。

I. $f(x)$ ガ $(-\infty,\infty)$ デ定義サレテ居ルトスル。a ヲ任意ノ實數トシ $f(x)$ カラ、$f(x+a)$ ニウル演算ヲ T_a デ表ス。乃チ $T_a f(x)=f(x+a)$.

次ニ，$f(x)\varepsilon L^2(-\infty,\infty)$ トスル。乃チ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx<+\infty$$

今、コノ $f(x)$ ヲ他ノ L^2―函數ニ変換スル演算 Λf ヲ考ヘル。Λf ハ次ノ三ツノ公理ヲ満足スルモノトスル。

公理 I.[1] Λf ハ分配ノ法則ヲ満足スル。乃チ $f_1(x)\varepsilon L^2$, $f_2(x)\varepsilon L^2$ 及ビ，c_1, c_2 ガ定數ナルトキ

$$\Lambda(c_1f_1(x)+c_2f_2(x))=c_1\Lambda f_1(x)+c_2\Lambda f_2(x)$$

公理 II. Λf ハ L^2-bounded デアル。乃チ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Lambda f(x)|^2dx\leqq G^2\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$$

ヲ充ス正數 G ガ存在スル。

---

(1) 以下、常數 c_1, c_2 ハ簡單ノタメ実數トスル。複素數ノ場合ヘノ拡張ハ容易デアル。

公理III. Λf ハ translatable デアル。即チ任意ノ實數 a ニ對シテ

$$T_a \Lambda f(x) = \Lambda T_a f(x).$$

然ルトキ、次ノ定理ヲ得ル:

定理1. $f(x)$ ノ Fourier transform ヲ $\Gamma(\alpha)$ トスル，乃チ

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

然ルトキ

$$\Lambda f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\alpha) \Gamma(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

此処ニ，$\gamma(\alpha)$ ハ，$f(x)$ ニ無關係ナ，アル有界ナ函數デアル。

コノ定理ノ証明ハ、Bochner ノ手法[(2)]ヲ用キル。氏ハ，吾々ノ公理 III ノ代リニ

公理III* Λf ハ，differentiation ト permutable デアル。乃チ $f_1(x) \in L^2$，$f_2(x) \in L^2$ 及ビ $f_1'(x) = f(x)$ ナラバ

$$\Lambda f_1(x) = \frac{d}{dx} \Lambda f(x)$$

ヲ採ツテ、同様ナ定理ヲ得テ居ル。

(2) S. Bochner, Math. Zeits. 29 (1928)

2. 定理1ヨリ次ノ結果ヲ得ル:

定理 2.

$$\Lambda f(x)=\underset{T\to\infty}{l.m.}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_T(x-t)f(t)\,dt^{(3)}$$

但シ此處ニ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_T(x)|^2dx \leqq 2G^2T$$

更ニ, M. Fréchet[(4)] ノ定理ヲ用キテ,

定理3.

$$\Lambda f(x)=\underset{T\to\infty}{l.m.}\int_{-T}^{T}\varphi_T(x-t)f(t)\,dt$$

コヽニ, $\varphi_T(t)\varepsilon L^2(-T,T)$

3. 本節ニ於イテハ、尚一般ナル Operator $\overset{*}{\Lambda}f(=\overset{*}{\Lambda}f(x))$ ヲ考ヘル。コレハ, $f(x)\varepsilon L^q(-\infty,\infty)$ $(q>0)$ ヲバ, $L^p(-\infty,\infty)$ $(p\geqq 1)$ ヘ変換スルモノトシ、公理I, III ニ加フルニ, 次ノ公理II*ヲ満足スルモノトスル。

公理II*. $\overset{*}{\Lambda}f$ ハ L^p-bounded デアル。即チ正数G

---

(3) $\underset{T\to\infty}{l.m.}\,f_T(t)=f(t)$ トハ

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_T(t)-f(t)|^2dt=0$$

ヲ意味スル。

(4) M. Fréchet, Comptes Rendus, t 144 (1907)

cf. Banach, Théorie des oprations linearies 1932.

ガアツテ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\overset{*}{\Lambda} f(x)|^p dx \leqq Q^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^q dx$$

然ルトキ，次ノ結果ヲ得ル。

定理4.

$$\overset{*}{\Lambda} f(x) = \underset{T\to\infty}{l.m.}^{p} \int_{-T}^{T} f(t)\,\varphi_T(x-t)\,dt^{(5)}$$

但シ，$\varphi_T(t) \varepsilon L^{p'}(-T, T)$

而シテ　$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ (6)

コノ定理ノ証明ニハ，F. Riesz ノ定理(7) ヲツカフ。更ニ数列ノ変換ニ関シテモ同様ナ結果ヲ得ル。

---

(5) $\underset{T\to\infty}{l.m.}^{p} f_T(t) = f(t)$ ハ次ノ-トヲ意味スル:

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_T(t) - f(t)|^p dt = 0$$

(6) $p=1$ ナラバ $p'=\infty$, $p'=\infty$ ナラバ，$L^{p'}$ ハ bounded functions ヲ意味スル。

(7) F. Riesz. Math. Ann. 69 (1910) (cf. Banach, loc. cit.)