280. 距離附ケラレタ環ニ於テ開デタ連續群

吉田耕作（阪大）

第58号（論文203）ニ於テ南雲氏ハ「連續ナ環」ヲ定義シ次イデコンニ einbetten シタ one-parameter group ノ analytical representation ヲ與ヘラレタ。筆者ハ以下ニ

J. von Neumann: Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen. M.Z. 1929.

H. Cartan: Sur les groupes de transformations analytiques (Actualités 198)

ノ論法ヲ助ケトシテ稍ミ一般ニ表題ノ如キ議論ヲシテミタイト思ヒマス。其ノ idee ニ於テ Neumann ト異ナル所ハナイノデスガ i) Neumann ノ Matrix ニ關スル議論ガ結局距離ヅケラレタ vollständig ナ Ring ニ於テ開デタ有限次元ノ連續群ノ話ナルコトガ明ニナリ ii) 斯カル群ニ於ケル differentiability at Einselement ヲ Cartan ノ propriété (P) ニ倣ッテ定義スレバ南雲氏ノ如キ abstract ナ微分方程式ニヨッテ群ヲ erzengen シ得ルコトガ云ヘル iii) Fundamental theorem (以下ニ述ベル) ノ証明ガ上ノ微分方程式ノタメニ Neumann

ノヨリモワカリヨクナツテヲリマス。之レダケヲ注意シテオキタイト思ヒマス。

I 準備

南雲氏ノ「連続ナ環」ヲ距離ヅケラレタ環ト呼ブコトニシマス、即チ實数ヲ Operatorbereich トシ metric 且ツ vollständig ナ環。但シ以下ニハ此ノ環ニ Einheit（其絶對値 1）ノ存在ヲ假定シマス、然ラバ此ノ Ring R ニ於テ（絶對收斂ニヨリ）

$$\exp. A = E + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A^{\nu}}{\nu!} \qquad \text{for all } A \in R$$

$$\ln. A = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(A-E)^{\nu} \qquad \text{for all } A \in R \text{ for which } |A-E| < 1$$

ガ定義サレル。

Neumann ガ Matrix ニ對シテ定義シタ exp. ヤ ln. ト同ジ論法デ（冪級数トノ比較）

(1) $\exp.\ \ln.\ A = A \quad \text{for } |A-E| < 1$

(2) $\ln.\ \exp.\ A = A \quad \text{for } |A| < \ln. 2$

(3) $\exp.\ A = E + A + O(|A|^2) \quad \text{for } |A| \text{ small}$

(4) $\ln.\ A = A - E + O(|A-E|^2) \quad \text{for } |A-E| \text{ small}$

ガ云ヘマス。コヽニ $O(|A|^2)$ 或ハ $o(|A|^2)$ ハ夫々コノ order ノ絶對値ヲモツ如キ R ノ element ノ意。

定理 1. $A_{\varepsilon_i} \in R$, $A_{\varepsilon_i} \to E$ for $i \to \infty$. 且 $0 < \varepsilon_i$,

$\varepsilon_i \to 0$ for $i - \infty$ トスル。然ラバ

$$\frac{A_{\varepsilon_i} - E}{\varepsilon_i} \quad ト \quad \frac{\ln. A_{\varepsilon_i}}{\varepsilon_i}$$

トハ同時ハ $\mathfrak{R}$ ノ同一ノ element ＝収斂スル。

証明.

$$\frac{1}{\varepsilon_i} \ln. A_{\varepsilon_i} = \frac{1}{\varepsilon_i}(A_{\varepsilon_i} - E) + \frac{1}{\varepsilon_i} O\left(|A_{\varepsilon_i} - E|^2\right) \quad \text{by (4)}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_i}(A_{\varepsilon_i} - E) + \varepsilon_i O\left(\frac{1}{\varepsilon_i^2} |A_{\varepsilon_i} - E|^2\right)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i}(A_{\varepsilon_i} - E) = \frac{1}{\varepsilon_i}(\exp. \ln. A_{\varepsilon_i} - E) \quad \text{by (1)}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_i}\left(\ln. A_{\varepsilon_i} + O\left(|\ln. A_{\varepsilon_i}|^2\right)\right) \quad \text{by (3)}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_i} \ln. A_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i O\left(\frac{1}{\varepsilon_i^2} |\ln. A_{\varepsilon_i}|^2\right)$$

カラ明カ。

定理2. $\frac{1}{\varepsilon_i}(A_{\varepsilon_i} - E) \to \mathfrak{U} \in \mathfrak{R}$ ナラバ $\mathfrak{R}$ ＝

$$n(A_n - E) \to \mathfrak{U}; \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

ナル如キ $\{A_n\}$ ガ存在スル。然モ A_n ハ $\{A_{\varepsilon_i}\}$ ノ適當ナ Teilfolge ノ Potenz ＝トレル。

証明. $\varepsilon_{i(n)} < \frac{1}{n}$ ナル $\varepsilon_{i(n)}$ ヲトル。正整数 $q_{i(n)}$ ヲ

$$(q_{i(n)} - 1)\varepsilon_{i(n)} < \frac{1}{n} \leqq q_{i(n)} \varepsilon_{i(n)}$$

ヲ満足スル如クトリ $B_{i(n)} = (A_{\varepsilon_{i(n)}})^{q_{i(n)}}$ トヲケバ

$$n \ln. B_{i(n)} = n q_{i(n)} \ln. A_{\varepsilon_{i(n)}} = n q_{i(n)} \cdot \varepsilon_{i(n)} \left\{\frac{1}{\varepsilon_{i(n)}} \ln. A_{\varepsilon_{i(n)}}\right\}$$

$\longrightarrow 1 \cdot \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ (*by* 定理1)

ヨッテ $A_n = (A_{\varepsilon_{i(n)}})^{g_{i(n)}}$ トオイテ定理1ヲ使ヘバヨイ。

(上ニ $\ln . A^m = m \ln . A$ ヲ使ッタ。之ハタヤスク証明出来ル。m ハ正整数)

次ニ $\mathfrak{R}$ ノ部分集合 $\mathfrak{G}$ ガ $\mathfrak{R}$ ノ掛算ヲソノ Compositionsregel トシテ，$\mathfrak{R}$ ノ metric ノ意味デ連続群ヲ作ッテルトスル。$\mathfrak{G}$ ノ Einheit ハ先ノ E トスル。今 $\mathfrak{G} \ni A_{\varepsilon_i}$，$\frac{1}{\varepsilon_i}(A_{\varepsilon_i} - E) \longrightarrow \mathfrak{U}$ ノ如クシテ得ラレル $\mathfrak{U} \in \mathfrak{R}$ ノ全体ヲ $\mathfrak{T}$ トスル。

定理3. $\mathfrak{T}$ ハ linear manifold $\subseteqq \mathfrak{R}$ デアリ，且 $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ ト共ニソノ commutator $\mathfrak{U}\mathfrak{V} - \mathfrak{V}\mathfrak{U}$ ヲ含ム。

証明. $\frac{1}{\varepsilon_i}(A_{\varepsilon_i} - E) \longrightarrow \mathfrak{U}$，$\frac{1}{\varepsilon'_i}(A_{\varepsilon'_i} - E) \longrightarrow \mathfrak{V}$ トセヨ。

然ラバ $\mathfrak{G}$ 内ニ $n(A_n - E) \longrightarrow \mathfrak{U}$，$n(A'_n - E) \longrightarrow \mathfrak{V}$ ナル如キ $\{A_n\}$，$\{A'_n\}$ ガ存在スル。(定理2)

$$
\begin{aligned}
n(A_n A'_n - E) &= n(A_n - E) + n(A'_n - E) + n(A_n - E)(A'_n - E) \\
&= n(A_n - E) + n(A'_n - E) + \frac{1}{n}\{n(A_n - E)\cdot n(A'_n - E)\} \longrightarrow \mathfrak{U} + \mathfrak{V}
\end{aligned}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& n^2(A_n A'_n A_n^{-1} A_n'^{-1} - E) = n^2(A_n A'_n - A'_n A_n) A_n^{-1} A_n'^{-1} \\
& n^2(A_n A'_n - A'_n A_n) = n^2\{(A_n - E)(A'_n - E) - (A'_n - E)(A_n - E)\} \rightarrow \mathfrak{U}\mathfrak{V} - \mathfrak{V}\mathfrak{U} \\
& A_n^{-1} A_n'^{-1} \longrightarrow E
\end{aligned}
\right.
$$

及ビ $n\alpha(A_n - E) \longrightarrow \alpha\mathfrak{U}$ (α real) カラ定理2ニヨリ $n(\tilde{A}_n - E) \longrightarrow \alpha\mathfrak{U}$ ナル如キ $\{\tilde{A}_n\}$ ガ $\mathfrak{G}$ ニ存在スルコトカラワカル。

II. 群 $\mathfrak{G}$ ノ定義微分方程式

以下ニハ $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{R}$ ニ於テ閉デテヲルトスル。即チ $A_i \in \mathfrak{G}$, $A_i \longrightarrow B \in \mathfrak{R}$ ナラ $B \in \mathfrak{G}$ ト假定スルノデアル。

定理4. $\mathfrak{U} \in \mathfrak{T}$ ナラ $e^{\alpha\mathfrak{U}}$ (α real) $\in \mathfrak{G}$.

証明. $\alpha\mathfrak{U} \in \mathfrak{T}$（定理3）デアル。ヨッテ $\{A_i\}$ ナル $\mathfrak{G}$ ノ部分列ニ對シテ $n(A_n - E) \longrightarrow \alpha\mathfrak{U}$。定理1ニヨレバ

$$n\, ln.\, A_n = ln.\,(A_n^n) \longrightarrow \alpha\mathfrak{U}.$$

ヨッテ $exp.\, ln.\,(A_n^n) = A_n^n \longrightarrow e^{\alpha\mathfrak{U}}$. $A_n^n \in \mathfrak{G}$ ダカラ $exp.(\alpha\mathfrak{U}) \in \mathfrak{G}$（$\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{R}$ ニ於テ fermé）

定理5. $\mathfrak{U} \in \mathfrak{T}$ ナラ微分方程式

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = \mathfrak{U}x \qquad (t \text{ real parameter})$$

ヲ initial condition（$t=0$ ノトキ $x=E$）デ解ク $x(t) \in \mathfrak{G}$.

証明. 上ノ如キ abstract ナ微分方程式ハ南雲氏論文ニ取扱ハレテヨリ，南雲氏ハ之ヲ積分方程式ノ形

$$x(t) = E + \mathfrak{U}\int_0^t x(t)\,dt$$

ニ書イテ successive approximation ニヨッテ解カレタ。其ノ解ハ

$$\chi(t)=E+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{U^m}{m!}t^m$$

デアッタ。之ハ我々ノ先ニ定義シタ $\exp. tU$ ニ他ナラヌカラ前定理ヲ用フレバヨイ。

III. 群ノ生成（Erzeugung）

$\mathfrak{G}$ ガ $\mathfrak{R}$ ニ於テ閉デテヲルトイフコトノ他ニ，$\mathfrak{G}\ni A_i$，$A_i\neq E$，$A_i\longrightarrow E$ ナル $\{A_i\}$ ヲ與ヘタトキニ A_i ノ適當ナ Teilfolge A'_i ヲトレバ $\frac{1}{\varepsilon_i}(A'_i-E)\longrightarrow U(\neq 0)\in\mathfrak{J}$ ナル如キ $\varepsilon_i>0$，$\varepsilon_i\longrightarrow 0$ ガ存在スルモノト假定スル。之ガ群 $\mathfrak{G}$ ガ E ニ於テ differentiable ト名ヅケルコトニシヨウ。

Fundamental theorem. $\mathfrak{G}$ ガ

i) $\mathfrak{R}$ ニ於テ閉ヂテヲリ

ii) $\mathfrak{G}$ ガ finite dimension

iii) $\mathfrak{G}$ ガ zusammenhängend トスレバ

$\mathfrak{G}$ ハ Lie group ヲ作ル。即チ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ element ハ

$\prod_{i=1}^{k}\exp. V_i$，$V_i\in\mathfrak{J}$ ノ形ニ書ケル。

證明. 第一段: $\mathfrak{G}$ ガ n dimension トスレバ $\mathfrak{J}$ モ高々 n dimension。何者 $\mathfrak{J}$ ハ linear manifold ダカラソノ一次独立ナ Base ヲ $U_1, U_2, \text{------}, U_m$; $n+1\leqq m$; トスレバ $\mathfrak{G}$ ニ屬スル element $\exp. \sum_{i=1}^{m}a_iU_i$;

a_i real; ハ E ノ近傍デ少クトモ $n+1$ dimension ニナッテ了フ。ヨッテ $\mathfrak{T}$ ハ $k(\leqq n)$ コノ一次独立ナ Base $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \text{-------}, \mathfrak{V}_k$ ヲモツ。従ッテ $\mathfrak{T}$ ハ $\mathfrak{R}$ ニ於イテ fermé

第二段. $\exp. \sum_{i=1}^{k} a_i \mathfrak{V}_i$; a_i real $\sum_{i=1}^{k} |a_i| \leqq 1$; ノ形ニ書ケル $\mathfrak{G}$ ノ element 全体 Γ ハ $\mathfrak{G}$ ニ於テ fermé. 然モ Γ ノ element デ E ノ近傍ニアルモノハ Gruppen-eigenschaft モツ. 何者,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathfrak{U}x(t), \quad \frac{d\psi(t)}{dt} = \mathfrak{V}\psi(t); \quad \mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in \mathfrak{T}$$

トスレバ明カニ

$$\frac{d\chi(t)\psi(t)}{dt} = \frac{d\chi(t)}{dt}\psi(t) + \chi(t)\frac{d\psi(t)}{dt}$$

$$= \mathfrak{U}\chi(t)\psi(t) + \chi(t)\mathfrak{V}\psi(t).$$

之レガ $\mathfrak{W}\chi(t)\psi(t)$, $\mathfrak{W} \in \mathfrak{T}$ ノ形ニカケルトヨイ。依ッテ $\mathfrak{U}\chi(t) + \chi(t)\mathfrak{V} = \mathfrak{W}\chi(t)$ トカケルトヨイ。両辺ニ $\chi(t)^{-1} = \chi(-t)$ ヲカケルコトニヨリ結局

$$\chi(t)\mathfrak{V}\chi(-t) \in \mathfrak{T}$$

ガ云ヘレバヨイ。然ルニ $\mathfrak{V} \in \mathfrak{T}$ ダカラ $n(A_n - E) \longrightarrow \mathfrak{V}$ ナル $\{A_n\}$ ガ $\mathfrak{G}$ ニ存在スル。故ニ

$$n(\chi(t)A_n\chi(-t) - E) \longrightarrow \chi(t)\mathfrak{V}\chi(-t)$$

ヨッテ $\chi(t)\mathfrak{V}\chi(-t) \in \mathfrak{T}$.

第三段. $A_i \in \mathfrak{G}$; $A_i \overline{\in} \Gamma$; $A_i \longrightarrow E$ カラ矛盾ヲ出

ス。Γ ハ $\mathfrak{G}$ ニ於テ *fermé* ダカラ $T\in\Gamma$ ナルトキ

$$|TA_i - E| \geqq |T_i A_i - E| = \varepsilon_i > 0$$

ナル如キ T_i ガ Γ ニ存在シナケレバナラヌ。$A_i \longrightarrow E$, $E\in\Gamma$ ダカラ $T_i \longrightarrow E$ 従ッテ $\varepsilon_i \longrightarrow 0$。*differentiability at* E カラ $\frac{1}{\eta_{i(n)}}(T_{i(n)}A_{i(n)} - E) \longrightarrow \mathfrak{W} \neq 0$ ナル如キ *Teilfolge* ガアル。

ヨッテ特ニ $\frac{\varepsilon_{i(n)}}{\eta_{i(n)}} \not\longrightarrow 0$。 循 $\eta_{i(n)}$ ガ充分小ナラ

$\exp.(-\eta_{i(n)}\mathfrak{W}) \in \Gamma$.

ヨッテ $\exp.(-\eta_{i(n)}\mathfrak{W})\, T_{i(n)} \in \Gamma$ (第二段)。故ニ

$$|\exp.(-\eta_{i(n)}\mathfrak{W})\, T_{i(n)} A_{i(n)} - E| = \varepsilon'_{i(n)}$$

トヲクト $\varepsilon'_{i(n)} \geqq \varepsilon_{i(n)}$ デナケレバナラヌ。然ルニ

$$\exp.(-\eta_{i(n)}\mathfrak{W}) = E - \eta_{i(n)}\mathfrak{W} + O(|\eta_{i(n)}|^2)$$

又 $$T_{i(n)}A_{i(n)} = E + \eta_{i(n)}\mathfrak{W} + o(\eta_{i(n)})$$

ダカラ $$\exp.(-\eta_{i(n)}\mathfrak{W})\, T_{i(n)}A_{i(n)} - E = o(\eta_{i(n)})$$

ヨッテ $\varepsilon'_{i(n)} = o(\eta_{i(n)})$。又一方 $\frac{\varepsilon_{i(n)}}{\eta_{i(n)}} \not\longrightarrow 0$ ダカラ

$\varepsilon'_{i(n)} = o(\varepsilon_{i(n)})$ 之ハ $\varepsilon'_{i(n)} \geqq \varepsilon_{i(n)}$ ニ反ス。

カクテ $\mathfrak{G}$ ノ E ノ近傍ハ Γ デツクサレルコトガワカッタ。

第四段. $\prod_{i=1}^{l} \exp.\mathfrak{V}_i$, $\mathfrak{V}_i \in \mathfrak{T}$ ノ形ニ書ケル $\mathfrak{G}$ ノ *element* ノ全体 $\mathfrak{G}'$ ハ $\mathfrak{G}$ ニ於テ *offen* ナ *subgroup* ヲ作ル。何者, $A\in\mathfrak{G}'$, $B_i \in \mathfrak{G}$, $B_i \longrightarrow A$ トスルト $B_iA^{-1} \longrightarrow E$。ヨッテ i ガ充分大キイト $B_iA^{-1} \in \Gamma \subseteqq \mathfrak{G}'$。

ヨッテ $B_i \in \mathfrak{G}'$。 且ツ $\mathfrak{G}'$ ハ明カニ zusammenhängend ダカラ $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$.

Remark. 南雲氏ハ Polya ガ matrix ニ就テ行ッタヤウニ integration ニヨッテ $\mathfrak{R}$ ニ於ケル One-parameter group ノ微分可能性ヲ巧ミニ示サレタ。コノトキハ從ッテ

$$\frac{G\left(\frac{t}{n}\right) - G(0)}{\frac{t}{n}} \longrightarrow G'(0)$$

故ニ $n\left\{G\left(\frac{t}{n}\right) - E\right\} = tG'(0)$。 從ッテ $n \ln. G\left(\frac{t}{n}\right) \rightarrow tG'(0)$ ヨッテ $G\left(\frac{t}{n}\right)^n = G(t) \longrightarrow \exp.\left(tG'(0)\right)$ デアリマス(定理4ノ証明ト同ジデ Fundamental theorem ヲ要シナイ)