284. 多項式ノ既約性ニ就イテ

瀧澤周雄（東大學生）

定理. 整係數多項式

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ニ於テ

$$a_1 > a_2 > \cdots\cdots > a_n > 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ナラバ (1) ハ有理数体ニ於テ既約デアル。但シ $x^2+(m+1)x+m$ ハ例外デアル。

証明 $$k=Min\left(\frac{a_1}{a_2}\cdots\cdots\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

トオキ (1) ニ $kx-1$ ヲ掛ケルト

$$kx^{n+1}+(a_1k-1)x^n-(a_1-a_2k)x^{n-1}-\cdots\cdots\cdots\cdots-(a_{n-1}-a_nk)x-a_n\cdots\cdots\cdots(4)$$

始メノ二項ハ単位円周上ニテ絶対値ガ

$$a_1k-1-k$$

ヨリ小ナラズ、後ノ n 項ハ同円周上ニテ絶対値ガ

$$(a_1-a_2k)+\cdots\cdots+(a_{n-1}-a_nk)+a_n$$

ヲ超エナイ。故ニ

$$a_1k-1-k>(a_1-a_2k)+\cdots\cdots+(a_{n-1}-a_nk)+a_n$$

即チ

$$a_1+\cdots\cdots+a_n>\frac{k+1}{k-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ナラバ (4) ハ単位円ノ内部ニ n ケノ根ヲ持ツコトニナリマス、サテ (2) ノ條件ノ下ニハ

$$k\geqq\frac{a_1}{a_1-1}$$

従ッテ

$$\frac{\dfrac{a_1}{a_1-1}+1}{\dfrac{a_1}{a_1-1}-1}\geqq\frac{k+1}{k-1}$$

故ニ (5) ヨリ

$$a_1+\cdots\cdots+a_n>2a_1-1$$

ナラバヨイ。

即チ $$a_1<1+a_2+\cdots\cdots+a_n$$

ナラバ (1) ハ單位円ノ内部ニ $n-1$ ケノ根ヲ有シテ可約トハナリ得ヌ 一方 Perron ノ結果ニヨリ

$$a_1>1+a_2+\cdots\cdots+a_n$$

ナラバ (1) ハ既約デアル、又

$$a_1=1+a_2+\cdots\cdots+a_n$$

ノトキモ $f(\pm 1)\neq 0$ ナラバ、ヤハリ (1) ハ既約デアル。

コヽニ $f(x)$ ハ (1) ヲ指ス。(Perron, Journ. f. Math. 132, 1907).

(2) ノ條件ノ下ニハ $x^2+(m+1)x+m$ ヲ除イテハ恒ニ $f(\pm 1)\neq 0$ デアル。要スルニツマラナイ問題デシタ。