298. 距離ヅケラレタ環ニ於テ閉デタ連續群 III

吉田 耕 作（阪大）

前談話280ニ於テ $\mathfrak{G}$ ノ differentiability ヲ $\mathfrak{G}$ ダケノ topological ナ條件カラ出セナイカト申シマシタガ次ノコトガ云ヘル樣デス。

定理 R ニ einbetten シタ群 $\mathfrak{G}$ ガ locally compact ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ differentiable デアル。

$\mathfrak{G}$ ノ of dimension finite ヲ假定シテアリマセン。証明ニハ三ツノ lemma ヲ要シマス。

Lemma 1. 任意ノ群 $\mathfrak{G}$ ハ arbitraily small cyclic group ヲ subgroup トシナイ。

証. 任意ニ小ナル $\delta>0$ ニ對シ, $A\neq E$ $|A^n-E|\leq\delta$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots\ldots$ ヲ滿足スル如キ A ガ $\mathfrak{G}$ ニハ存在シナイ。何者，若シ斯カル A ガ或ル小サナ δ ニ對シ存在スレバ

$$\ln A^n = A_n - E + O(|A_n - E|^2)$$

ニヨリ $|\ln A^n| = |n \ln A| = |n||\ln A| \leq |A_n - E| + O(|A^n - E|^2) = \delta + O(\delta^2)$。之ハ $n\to\infty$ ノトキ矛盾デアル。

Lemma 2. $\mathfrak{G}$ ガ locally compact ナラバ $A_i \in \mathfrak{G}$, $A_i \neq E$, $A_i \to E$ ナル $\{A_n\}$ ニ對シ適當ナ Teilfolge $\{A'_n\}$ ヲトルト $A_n'^{\,p_n} \longrightarrow A \neq E$ ナル如キ整數 p_n ノ folge アリ。

證. *Lemma* 1 ニヨリ各 A_i ニ對シ

$$\left|A_i^{p_i\pm 1}-E\right|\leqq\delta,\quad \left|A_i^{p_i}-E\right|>\delta$$

ナル如キ整數 p_i アリ（但シ $p_i>0$ ノトキハ p_i-1, $p_i<0$ ノトキハ p_i+1 ノ方ヲトル。又勿論 $|A_i-E|<\delta$, $i=1, 2, 3, \cdots\cdots$ トス）$A_i\longrightarrow E$ ト $\mathfrak{G}$ ノ composition ノ stetigkeit（ソノ topology ハ $\mathfrak{R}$ ノソレト同ジ）カラ

$$\left|A_i^{p_i}-E\right|\leqq\varepsilon(\delta),\qquad i=1, 2, 3, \cdots\cdots$$

ナル如キ $\varepsilon(\delta)$ ガ存在スル。ヨッテ $\mathfrak{G}$ ノ locally compact ナコトカラ *Lemma* ヲ得ル。

Lemma 3. $\mathfrak{G}$ ガ locally compact ナラ $\mathfrak{G}$ ハ E ニ於テ differentiable デアル。

證. $A_i\in\mathfrak{G}$, $A_i\neq E$, $A_i\longrightarrow E$ トス。*Lemma* 2 ニヨリ $A_i'^{\,p_i}\longrightarrow A\neq E$ ナル如キ A_i', p_i アリ。ヨッテ

$$\ln A_i'^{\,p_i}=p_i\ln A_i'\longrightarrow\ln A\neq 0$$

依ッテ $p_i(A_i'-E)\longrightarrow\ln A\neq 0$

— 以上 —

ヨッテ先ノ Fundamental theorem ヲ次ノ如ク述ベルコトが出來ル.

Fundamental theorem. Metrical complete ring $\mathfrak{R}$ ニ於テ閉デタ連續群 $\mathfrak{G}$ ガ

i) of finite dimension

ii) locally compact

iii) Zusammenhängend

ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ Lie 群デアル。

之ハ Hilbert ノ問題ノ special case ノ一ツノ解答デアル。

尚先ノ differentiability ノ定義ニ於ケル「正數 ε_i」ヲ「實數 ε_i」トシタ方ガ話ガ symmetric ニナル。又 n ガ負整數ノ場合ノ $\ln A^n$ ヲモ考ヘテ A ガ充分 E ニ近ケレバ $\ln A^n = n \ln A$ ヲ上ノ議論中ニ使ッタ。differentiability ニツイテモコノ「實數 ε_i」ノ意味デ議論シマシタ。

今一ツ上ノ Fundamental theorem ニ於テ $\mathfrak{G}$ ガ $\mathfrak{R}$ ニ於テ閉デテヲルト云フコトハ「$\mathfrak{G}$ ガ Einheit ノ近傍ニ於テ $\mathfrak{R}$ ノ中デ閉デテヲル」ニ直セマス。

即チ斯カル近傍ノ element ガ $\exp.\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \in \mathfrak{T}$ ト表ハセルコトノ証明ハ先ノ証明（前論 280）ヲ少シ modify スレバヨイノデスカラ。ダカラ南雲氏ノ結果ガ上ノ Fundamental theorem ノ系トシテ得ラレマス。