299. Class $L_1(0,\infty)$ ノ函數ノ Fourier transform. I.

高橋龍夫（東北大）

$f(x) \subset L_p(0,\infty)$ $(2 \geqq p > 1)$ トスルト
$F(u,a)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a f(x)\cos xu\,dx$ ハ L_q ニ於ケル mean デ $a\to\infty$ ノトキソノ Fourier transform $F(u)$ ニ converge スル、ソシテ $F(u)$ ハ $L_q(0,\infty)$ ノ函数デアル、コヽニ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. ソシテ $F(u)$ カラ

$$f(x,a)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a F(u)\cos xu\,du$$ ヲ作ルト $f(x,a)$ ハ

L_p ニ於ケル mean デ $f(x)$ ニ converge スル、之ハ Titchmarch 及ビ Hille-Tamarkin ニヨツテ証明サレタコトデアルガ $f(x,a)$ ガ mean デ $f(x)$ ニ tend スルコトハ $p=1$ ノ場合ニハ成立シナイ. 之レハ Hill-Tamarkin (Bull. of the Amer. Math. Soc. 1933) ニヨツテ成立シナイ例ガ擧ゲラレテヰル、然シ更ニ簡單ニ $f(x)=1$ for $0<\alpha\leqq x\leqq\beta<\infty$ 且ツ他デハ 0 デアルヤウナ function ガソノ例ニナルコトガ容易ニ証明出來ル。吾々ハ $f(x)\subset L_1(0,\infty)$ ナラバ $f(x,a)$ ガ $a\to\infty$ ノトキ如何ナル function ニ關シテ mean デ converge スルカヲ考ヘテ見ル、サテ $f(x,a)$ ガ $(C,1)$ デ $f(x)$ ニ almost everywhere tend スルコトハ衆知デアルガ

上ノ mean convergence ノ意味がツケラレルト L_1 class ノ Fourier transform ノ Theory デ (C, 1) トイフ technic が省カレハシナイカトモ思ハレル。

之ノ問題ヲ考ヘルノニ今 Fourier series ノ analogy ヲ考ヘテ見ル、$f(x,a)$ ハ Fourier series ノ partial sum ニ對應スルモノデアッテ今 $f(x)$ ノ Fourier series ノ partial sum ヲ $S_n(x)$ トスルトヤハリ $S_n(x)$ ガ L_1 ニ於ケル mean デ $f(x)$ ニ converge シナイ．然シ有名ナ Kolmogoroff ノ定理カラ，$n\to\infty$ ノトキ

$$\int_0^{2\pi}\left|f(x)-S_n(x)\right|^{1-\varepsilon}dx\to 0 \quad (\varepsilon>0)$$

ガ云ハレル、コノ analogy ガ Fourier transform ノ Theory デ成立スルカヲ考ヘテ見ルト実ハ成リ立タナイ．即チ $f(x)=1$，$(0<\alpha\leqq x\leqq\beta<\infty)$；$f(x)=0$ $(0<x<\alpha,$ $\infty>x>\beta)$ ヲ考ヘルト之ニ附テハ

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^{\infty}\left|f(x)-f(x,a)\right|^{1-\varepsilon}dx$$

ハ存在シナイ、夫デ Fourier series ノ analogy ヲ辿ルコトガ出來ナイデ他ノ見地カラ考ヘ直サネバナラナイ。

方法トシテ L_p $(p>1)$ ノ場合ノヲ踏襲スルノデアルガ $f(x)\subset L_1$ ナル函数ニ對スル conjugate function $g(x)$

ト元ノ $f(x)$ トノ関係カラ考ヘテ見ル、$f(x)$ ガ finite interval デ定義サレテヰル場合カラ始メル、ソシテ Fourier series ノ Kolmogoroff ノ定理ニ類スルモノヲ証明シヤウ。

<u>Theorem 1.</u> $f(x) \subset L_1(0, 2\pi)$ トシソノ conjugate function ヲ $g(x)$ トスルト

$$\int_0^{2\pi} \frac{|g(x)|}{\left|\log|g(x)|\right|^{1+\varepsilon}+1}\,dx \leqq A\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx.$$

コヽニ A ハ f ニハ depend シナイ. 且ツ ε ハ任意ノ定マツタ正数デアル。

コノ証明ニ次ノ Titchmarsh ノ Lemma ヲ用フ.
(Proc. London Math. Soc., Vol. 29, 1928)

<u>Lemma.</u> $f(x)$ ノ conjugate function ヲ $g(x)$ トスル. $|g(x)| > R$ ナル set ヲ E トスルト

$$m(E)\cdot R < A\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx.$$

次ニ定理ノ証明ヲスル. $0 < |g(x)| \leqq K$ ナラバ $g_u(x) = |g(x)|$.
$|g(x)| > K$ ナラバ $g_u(x) = K$.

コウイフ $g_u(x)$ ヲトル. $|g(x)| > r-1$ ナル set ヲ e_r トシ $m(e_r) = \mu_r$ トオク。

$$\int_0^{2\pi} \frac{|g_u(x)|}{\left|\log|g_u(x)|\right|^{1+\varepsilon}+1}\,dx = \sum_{r=1}^{u}\int_{e_r - e_{r+1}} \frac{|g_u(x)|}{\left|\log|g_u(x)|\right|^{1+\varepsilon}+1}\,dx$$

今 $\phi(x)=\dfrac{x}{|\log x|^{1+\varepsilon}+1}$, $(x>0)$トオキ.

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\phi(x) \quad \text{for} \quad 0<x\leqq 1,\\ &=\text{linear} \quad 1\leqq x\leqq e^{\varepsilon},\\ &=\phi(x) \quad e^{\varepsilon}\leqq x<\infty\end{aligned}$$

トスルト $\psi(x)$ ハ monotone increasing ニナリ且ツ $|\phi(x)|\leqq A|\psi(x)|$ 且ツ $|\psi(x)|\leqq A|\phi(x)|$. (以下 A ハ absolute constant ヲ表ハシ場所場所デ異ツテオツテモヨイトスル)

ソウスルト

$$\int_0^{2\pi}\frac{|g_u(x)|}{|\log|g_u(x)||^{1+\varepsilon}+1}\,dx\leqq A\sum_{\gamma=1}^{u}\int_{e_\gamma-e_{\gamma+1}}\psi(|g_u(x)|)\,dx$$

$$\leqq A\sum_{\gamma=1}^{u}\psi(\gamma)\,(\mu_\gamma-\mu_{\gamma+1})$$

$$\leqq A\sum_{\gamma=1}^{u}\frac{\gamma}{|\log\gamma|^{1+\varepsilon}+1}\,(\mu_\gamma-\mu_{\gamma+1})$$

$$\leqq A\sum_{\gamma=1}^{u-1}\mu_{\gamma+1}\left(\frac{\gamma+1}{|\log(\gamma+1)|^{1+\varepsilon}+1}-\frac{\gamma}{|\log\gamma|^{1+\varepsilon}+1}\right)+A\mu_1.$$

サテ γ が充分大ナルトキ

$$\frac{\gamma}{|\log(\gamma+1)|^{1+\varepsilon}+1}-\frac{\gamma}{|\log\gamma|^{1+\varepsilon}+1}=O\left(\frac{1}{\log^{1+\varepsilon}\gamma+1}\right)$$

デアルカラ

$$\leqq A\sum_{\gamma=1}^{\mu-1}\mu_\gamma\cdot\frac{1}{\log^{1+\varepsilon}\gamma+1}+A\mu_1.$$

$$\leqq A\int_0^{2\pi}|f(x)|dx\cdot\sum_{\gamma=1}^{\mu-1}\frac{1}{\gamma(\log^{1+\varepsilon}\gamma+1)}\quad(\text{Lemma ヨリ})$$

$$\leqq A\int_0^{2\pi}|f(x)|dx.$$

$k\to\infty$ トシテ定理ガ証明サレタ。

<u>Theorem 2.</u> $f(x)$ ヲ $(0,2\pi)$ デ L_1 ニ属スルトシ, ソノ Fourier series ノ partial sum ヲ $S_n(x)$ トスルト

$$\int_0^{2\pi}\frac{|f(x)-S_n(x)|}{|\log|f(x)-S_n(x)||^{1+\varepsilon}+1}dx\to 0.\quad(n\to\infty).$$

証明. 容易ニ $\phi(2x)\leqq A\phi(x)$ ナルコトガ分ルカラ

$$\begin{aligned}\phi(x+y)&\leqq A\psi(x+y)\leqq A\psi(2\,\mathrm{Max}(x,y))\\&\leqq A(\psi(2x)+\psi(2y))\leqq A(\psi(x)+\psi(y))\\&\leqq A(\phi(x)+\phi(y)).\end{aligned}$$

$$S_n(x)=\frac{\cos nx}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(x+t)\sin n(x+t)}{\tan\frac{t}{2}}dt$$

$$-\frac{\sin nx}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(x+t)\cos n(x+t)}{\tan\frac{t}{2}}dt+o(1).$$

$g(x)$, $h(x)$ ヲ $f(x)\sin nx$, $f(x)\cos nx$ ノ conjugate function トスルト

$$\int_0^{2\pi}\frac{|S_n(x)|}{|\log|S_n(x)||^{1+\varepsilon}+1}dx \leqq A\int_0^{2\pi}\phi\left(\left|\frac{\cos nx}{2\pi}g(x)\right|\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\sin nx}{2\pi}h(x)\right|+o(1)\right)dx$$

$$\leqq A\int_0^{2\pi}\phi\left(\left|\frac{\cos nx}{2\pi}g(x)\right|\right)dx$$

$$+A\int_0^{2\pi}\phi\left(\left|\frac{\sin nx}{2\pi}h(x)\right|\right)dx+o(1)$$

$$\leqq A\int_0^{2\pi}\phi(|g(x)|)dx+A\int_0^{2\pi}\phi(|h(x)|)dx+o(1)$$

(1) $\leqq A\int_0^{2\pi}|f(x)|dx+o(1)$ (Theorem 1 カラ)

今 $\int_0^{2\pi}\phi(|f(x)-f_1(x)|)dx<\delta$ 及ビ $\int_0^{2\pi}|f(x)-f_2(x)|dx<\delta$

ヲ満足スルヤウニ任意ノ正数 δ ニ對シテ differentiable function $f_1(x)$ ヲトル、之ハ可能デアル。(拙著、函数列ノ強收斂，弱收斂ニ就テ，綜合報告，数物會誌). $f_1(x)$ ノ Fourier series ノ partial sum ヲ $S_n^{(1)}(x)$ トスルト $S_n^{(1)}(x)\longrightarrow f(x)$ ガ一様ニ成リ立ツ。故ニ

$$\int_0^{2\pi}\phi(|f_1(x)-S_n^{(1)}(x)|)dx\longrightarrow 0$$

今 $f(x)-f_1(x)=f_2(x)$ トオキ $f_2(x)$ ノ Fourier series ノ partial sum ヲ $S_n^{(2)}(x)$ トスルト (1) カラ

$$\int_0^{2\pi}\phi\left(\left|S_n^{(2)}(x)\right|\right)dx \leqq A\int_0^{2\pi}\left|f_2(x)\right|dx+o(1)\leqq A\delta+o(1).$$

故ニ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{2\pi}\phi\left(\left|f(x)-S_n(x)\right|\right)dx$$

$$\leqq A\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{2\pi}\phi\left(\left|f_1(x)-S_n^{(1)}(x)\right|\right)dx+A\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{2\pi}\phi\left(\left|f_2(x)\right|\right)dx$$

$$+A\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{2\pi}\phi\left(\left|S_n^{(2)}(x)\right|\right)dx\leqq A\delta+o(1)$$

之デ Theorem ノ証明ガ終ル。