300. 超越直徑ト測度トノ関係 II

角 谷 靜 夫 (阪大)

$h(t)$ ヲ $t>0$ ニ於テ定義サレタ正ノ連続函数デ $t \to 0$ ナルトキ $h(t) \downarrow 0$ ナルモノトスルトキ有界集合 E ノ h—測度 (精確ニハ h—外測度) ヲ次ノ如ク定義スル。

集合 E ヲ半径 $\rho_{\gamma n}$ ガ δ ヲ超エナイ有限個又ハ可附番個ノ円ニテ覆ヒ、カヽルアラユル覆ヒ方ニ對スル $\sum h(\rho_{\gamma n})$ ノ下限ヲ $m_h(E, \delta)$ トスレバ $m_h(E, \delta)$ ハ $\delta \to 0$ ナルトキ単調非減少デアル。

$$\lim_{\delta \to 0} m_h(E, \delta) = m_h(E) \qquad (\text{有限又ハ } \infty)$$

ヲEノ h—測度ト云フ。

278号ニ於テハ $h(t)=\dfrac{1}{\log\frac{1}{t}}$ ナルトキ $m_h(E)=0$ ナラバEノ超越直径ガ0ナルコトヲ示シタ。逆ニEノ超越直径ガ0ナラバ

$$\lim_{r\to 0}\int_r \frac{h(t)}{t}\,dt \qquad (5)$$

ガ存在スル如キ $h(t)$ ニ對シテ $m_h(E)=0$ ナルコトハ H. Cartan, Ahlfors, Frostmann 等ノ結果ヲ綜合スレバ容易ニ示サレル。

シカルニ (5) ガ存在スル如キ $h(t)$ ト $\dfrac{1}{\log\frac{1}{t}}$ トノ間ニハマダ相當ノ距リガアル。

次ニ $h_1(t)=\dfrac{1}{\log\frac{1}{t}}$ ニヨル測度 >0, $\dfrac{1}{\log\log\frac{1}{t}}$ ニヨル測度 0 ニテ且ツ超越直径0ナル有界閉集合Eノ例ヲ作ラウ。

$$\Delta_n=2e^{-2^n},\quad n=1,2,\text{------}$$

トオキ長サ $\Delta_0=\dfrac{2}{e}$ ナル閉區間ニ Cantor ノ操作ヲホドコス。但シコノ際 n 回目ニ取リ去ル開区間ノ長サハ何レモ $\Delta_{n-1}-2\Delta_n$, デアリ n 回ノ操作ノ後ニハ 2^n 個ノ長サ Δ_n ナル閉區間ガ残ルモノトスル。*

---

* $2\Delta_n<\Delta_{n-1}$. $n=1,2,\text{------}$ デアル。

コノ操作ヲイクラ行ツテモ取リ去ラレナイ点全体ノ集合Eハ完全集合デ上記ノ性質ヲモツテヰル。

先ヅ任意ノ$\delta>0$ニ對シテ$\Delta_n<\delta$ナルΔ_nヲ取レバEハ明カニ2^n個ノ長サ$\Delta_n+\varepsilon\ (<\delta)$ナル閉區間ニテオホヘルカラ（円デ覆ツタト考ヘレバ半径ハ$\frac{\Delta_n+\varepsilon}{2}$トナル）

$$m_{h_2}(E,\delta)\leqq 2^n\frac{1}{\log\frac{2}{\Delta_n+\varepsilon}\log\log\frac{2}{\Delta_n+\varepsilon}}.$$

εハイクラデモ小サク取レルカラ

$$m_{h_2}(E,\delta)\leqq\frac{2^n}{\log\frac{2}{\Delta_n}\log\log\frac{2}{\Delta_n}}=\frac{2^n}{2^n n\log 2}$$

$$=\frac{1}{n\log 2}$$

nハイクラデモ大キクトレルカラ$m_{h_2}(E,\delta)=0$，$\delta>0$ハ任意デアツタカラ$m_{h_2}(E)=0$デアル。

次ニnヲ任意ノ正整数トシ、Cantorノ操作ヲn回行ツタ後ニ残ツタ長サΔ_nナル2^n個ノ閉區間ノ中点ヲ夫々$z_{n,1},\ z_{n,2},\cdots\cdots,\ z_{n,2^n}$トスル。$2^n$次ノ多項式

$$P_{2^n}(z)=(z-z_{n,1})(z-z_{n,2})\cdots\cdots(z-z_{n,2^n})$$

ヲ考ヘレバ$z\in E$ナル任意ノzニ對シテ

$$|P_{2^n}(z)|\leqq\Delta_n\cdot\Delta_{n-1}\cdot\Delta_{n-2}^2\cdots\cdots\Delta_{n-k}^{2^{k-1}}\cdots\cdots\Delta_0^{2^{n-1}}$$

$$=2\cdot e^{-2^n}\cdot 2e^{-2^{n-1}}\cdot\left(2e^{-2^{n-2}}\right)^2\cdots\cdots\left(2\cdot e^{-2^{n-k}}\right)^{2^{k-1}}\cdots\cdots\left(2e^{-2}\right)^{2^{n-1}}$$

$$=2^{2^n}\cdot e^{-2^n}\cdot \underbrace{e^{-2^{n-1}}\cdot e^{-2^{n-1}}\cdots\cdots e^{-2^{n-1}}\cdots\cdots e^{-2^{n-1}}}_{n\text{個}}$$

$$=2^{2^n}\cdot e^{-(n+2)2^{n-1}}$$

$$\left|P_{2^n}(2)\right|^{\frac{1}{2^n}}\leqq 2\cdot e^{-\frac{n+2}{2}}$$

zハEノ任意ノ点デアリ、nハイクラデモ大キク取ルコトが出來タカラ、コレハEノ超越直徑が0ナルコトヲ示シテキル。

最後ニ $m_{h_1}(E)>0$ ナルコトヲ示サウ。コノタメニハ

$$\sum h_1(\rho_n)\geqq C>0$$

がアラユルEノ覆ヒ方ニ對シテ成立スル如キ Cが存在スルコトヲ示セバヨイ。Eハ閉集合デアルカラ *Borel-Lebesgue* ノ定理ニヨリEヲ有限個ノ開區間ニテ覆フ場合ノミヲ考ヘレバヨイ。 Eヲ有限個ノ開區間 I_m $(m=1,2,\text{-------},N)$ニテ覆ツタトセヨ。若シ二ツノ $I_m, I_{m'}$ ニ共通点がアレバ各々ヲ適當ニチヾメルコトニヨツテ $E\times(I_m+I_{m'})$ ハソノママデ$I_m, I_{m'}$ニハ共通点がナイヤウニスルコトが出來ル。(コレハEが *nondense* デアルカラ開區間 $I_m\times I_{m'}$ 内ニEノ点ヲ含マナイ開區間が存在スルコトヨリ明ラカデアル)

$h_1(t)$ハ單調デアルカラ各々ノI_mヲ縮メテモ$\sum h(\rho_m)$ハ増ヘナイ。ヨツテ始メカラ I_m ノドノ二ツニモ共通点がナ

イトシテオイテ良イ。

I_m ハ共通点ヲ持タナイカラ番号ヲ直線上ノ順ニヨッテツケタモノト考ヘテヨイ。相隣ル I_m, I_{m+1} ノ間ニ挟マレタ開區間ハ E ニ属シナイカラ上記ノ Cantor ノ操作ノ n_m 回目ニ取リ去ラレテキル。 $\max\limits_{1\leqq m\leqq N-1} n_m = n_0$ トオク。

$n\geqq n_0$ ナルトキ、n 回ノ Cantor ノ操作ノ後ニ残ル 2^n 個ノ長サ Δ_n ナル閉區間ハ何レモドレカノ I_m $(1\leqq m\leqq N)$ ニ含マレル。今 I_m ノ長サヲ ρ_m トスルトキ

$$\sum_{m=1}^{N} h_1(\rho_m) \geqq 2^n \cdot h_1\left(\frac{\Delta_n}{2}\right) = 1 \text{ ------------ } (6)$$

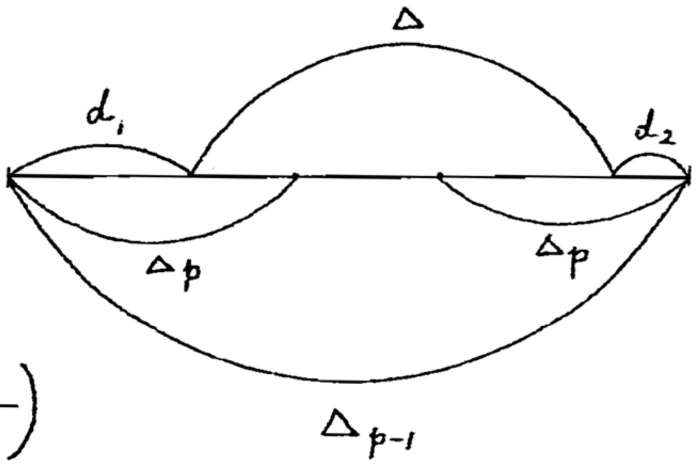
ナルコトヲ示セバ $C=1$ ト取レルコトガワカル。

コノタメニハ右圖ニ於テ

$\Delta = \Delta_{p-1} - d_1 - d_2$

$0 < d_1, d_2 < \Delta_p$

ナルトキ



$$h_1\left(\frac{\Delta}{2}\right) \geqq h_1\left(\frac{\Delta_p - d_1}{2}\right) + h_1\left(\frac{\Delta_p - d_2}{2}\right) \text{ ------------------------ } (7)$$

ナルコトヲ示セバ十分デアル。※※ 原点ノ十分近傍 $0 < t < \delta$ ニ

※※ コノ関係ヲ順次繰返シテ I_m ヲ細分シテ行キ、各々ノ Δ_n ノ長サノ區間ガ一ツヅツ I_m ニ含マレルヤウニスレバ (6) ガ得ラレル。

テ$h_1(t)$ハ凹函数（$h_1''(t)<0$）デアルカラ

$$h_1\left(\frac{\Delta_{p-1}}{2}\right)-h_1\left(\frac{\Delta}{2}\right)=\left\{h_1\left(\frac{\Delta_{p-1}}{2}\right)-h_1\left(\frac{\Delta_{p-1}-d_1}{2}\right)\right\}$$

$$+\left\{h_1\left(\frac{\Delta_{p-1}-d_1}{2}\right)-h_1\left(\frac{\Delta_{p-1}-d_1-d_2}{2}\right)\right\}$$

$$\leqq\left\{h_1\left(\frac{\Delta_p}{2}\right)-h_1\left(\frac{\Delta_p-d_1}{2}\right)\right\}$$

$$+\left\{h_1\left(\frac{\Delta_p}{2}\right)-h_1\left(\frac{\Delta_p-d_2}{2}\right)\right\}$$

ガ成立スル。

$$h_1\left(\frac{\Delta_{p-1}}{2}\right)=2h_1\left(\frac{\Delta_p}{2}\right)$$

ナルコトヲ用フレバ（7）ガ得ラレル。

コレデ上記ノEノ性質ガスベテ証明サレタ。