305. 函數方程式ニ就テ II

福原満洲雄（北大）

§1. 存在定理 2. 「E ハ *espace, normé et complet*; K ハ實軸上ノ線分; $\mathfrak{R}$ ハ (E×K) デ開イタ集合; $F(x, k)$ ハ $\overline{\mathfrak{R}}$ デ *complètement continue* (*vollstetig*),

即チ連続且ツ$F(\overline{\Omega})$ガEデ compact; Ω ノ縁Ω'デ

$$x-F(x,k)\neq 0;$$

Kニ属スル或値k_0デ

$$(a_0)\quad x-F(x,k_0)=0$$

ノ解ノ indice total ガ0デナイトスル、其ノ時

$$(a)\quad x-F(x,k)=0$$

ハKニ属スル任意ノ値kニ對シテ解ヲ持ツ」

コレハ Leray et Schauder ガ得タ結果デアル(Ann. Éc. norm., 1934). 彼等ハコレヲ楕円型偏微分方程式ニ關スル Dirichlet ノ問題ニ應用シテ從來ノ結果ヲ含ム一般的ナ結果ヲ得テ居リ, 更ニ Théorie du sillage ニ應用スルト豫告シテ居ル。

此ノ存在定理カラ次ノ系ガ導カレル。

系1. 「ω ハEデ開イタ, 0ヲ内部ニ含ム有界ナ星形ノ集合; $F(x)$ ハ $\overline{\omega}$ デ complètement continue; ω ノ縁ω'ノ上デハ

$$x-F(x)\neq 0;$$

且ツ $F(\overline{\omega})\subset\overline{\omega}$ ナラバ方程式

$$(a')\quad x-F(x)=0$$

ハ解ヲ持ツ」

存在定理1ハ此ノ特別ナ場合デアル、此ノ形ノ存在定理トシテハ Tychonoff ノ結果ガアル、彼ノ場合ニハωハ convexe デアルガ, 空間Eニ關スル假定ハ緩クナッテ井

ル、從ツテ *Leray et Schauder* ノ結果ヲモット廣イ空間ニ擴張スルコトが出來ナイデアラウカトイフ問題が起ルノデアルが，ソレニ關シテハ別ノ機會ニ述べルコトニシテ，ココデハ存在定理2ノ簡單ナ應用ヲ述べヨウ。

系2. 「Kハ $0 \leqq k \leqq 1$; ω_ε ハ $\|x\| < M - \varepsilon$ (ε ハ任意ノ正ノ數）ナルEノ点 x ノ集合; $\Omega_\varepsilon = (\omega_\varepsilon \times K)$; $F(x, 0) = 0$; $F(x, k)$ ハ $\overline{\Omega}_\varepsilon$ デ *complètement continue*; 更ニ任意ノ k ノ値ニ對シ (a) ノ解ハ多クトモーツデアルトスル、其ノトキ (a) ハ $0 \leqq k \leqq 1$ デ常ニ解ヲ持ツカ，又ハ $0 \leqq k < k_0$ ($0 < k_0 \leqq 1$) デ (a) ハ解ヲ持チ，其ノ解ヲ $x(k)$ デ表ハシタトキ

$$\lim_{k \to k_0 - 0} \|x(k)\| = M$$

トナルヤウナ k_0 が存在スル」

§2. 系2ニ於テ $M = +\infty$ トスルコトモ出來ル、ソレカラ容易ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理3. 「$F(x)$ ハ *linéaire, homogène* 且ツEノ有界ナ集合デ *complètement continue*;

(b) $X - kF(X) = 0$

ハ $0 \leqq k \leqq 1$ ノトキ0デナイ解ヲ持タナイトスル、其ノトキXニ關スル方程式

(c) $x = X - F(X)$

ハ唯一ツ解ヲ持チ，ソレヲ

$$X = x - G(x)$$

ト書ケバ $G(x)$ モ亦 *linéaire, homogène* 且ツE ノ有界ナ集合デ *complètement continue* デアル」

コレカラ次ノ結果ヲ得ル。

定理4. 「x_0 ハ (a') ノ一ツノ解，即チ $x_0 = F(x_0)$；$F(x)$ ハ x_0 ノ近傍デ微分ヲ持ツ，即チ

$$F(x) - F(x_0) = L(x - x_0) + f(x - x_0)$$

ニ於テ $L(X)$ ハ *linéaire, homogène* 且ツ有界ナ集合デ *complètement continue*，$\|X\| \to 0$ ノ時 $\|f(X)\| / \|X\| \to 0$；

$$X - kL(X) = 0$$

ハ $0 \leqq k \leqq 1$ ノトキ0デナイ解ヲ持タナイトスル、其ノトキ (a') ノ解 x_0 ハ孤立シテ居ル、即チ正ノ数 ε ヲ十分ニ小サク取レバ $\|x - x_0\| < \varepsilon$ ナル範囲ニ (a) ノ解ハ存在シナイ」

続イテ次ノ定理ヲ得ル。

定理5. 「x_0 ハ (a_0) ノ解，即チ $x_0 = F(x_0, k_0)$；$F(x, k)$ ハ (x_0, k_0) ノ近傍デ微分ヲ持ツ，即チ

$$F(x_0 + \xi, k_0 + \chi) - F(x_0, k_0) = L(\xi, \chi) + R(\xi, \chi)$$

ニ於テ

$L(\xi, \chi)$ ハ *linéaire, homogène* 且ツ有界ナ集合デ *complètement continue*，$\|\xi\| + |\chi| \to 0$ ノトキ

$$\|R(\xi,\lambda)\|/\{\|\xi\|+|\lambda|\}\to 0;$$

$$y-kL(y,0)=0$$

ハ $0\leqq k\leqq 1$ デ0デナイ解ヲ持タナイトスル、其ノトキ(a)ハ$k\to k_0$ナラバ$x\to x_0$デアルヤウナ解ヲ持ツ、ソレヲ$x(k)$デ表ハセバ$k\to k_0$ノ時

$$\frac{x(k)-x_0}{k-k_0}\to y_0$$

トナル、茲ニy_0ハ

$$y-L(y,1)=0$$

ノ解デアル」

§3. 以上Kヲ實軸上ノ線分トシタが，一般ニソレヲ或空間ノ連続体トイフ形ニ拡張スルコトモ出來ル、併シソノヤウナ擴張ハ大シテ興味がナイト *Leray et Schauder* ハ述ベテ居ルが，果シテ興味ノアルコトカナイコトカ速断スルコトハ出來ナイデアラウ、例ヘバ最後ニ述ベタ$x(k)$ノkニ関スル微分可能性ノ如キハkヲ複素変数トシ，k_0が0ヲ含ム領域Dノ任意ノ点デヨイナラバ，$x(k)$ヲkノ函数ト考ヘタトキDデ正則デアルコトヲ示ス、此ノ方法ハ方程式が線形デアルト否トニ拘ラズ使ヘル所が注目ニ値スルデアラウ、特ニ$F(X)$が *linéaire, homogène* 且ツ有界ナ集合デ *complètement continue* ナラバXニ関スル方程式

$$(b')\quad x=X-kF(X)$$

ハ第二種ノ *Fredholm* 積分方程式ヲ抽象化シタモノニナ

ル。

上ニ述ベタヤウナ方法デ其ノ解$X(k)$ガkノ有理型函数ニナルトイフヤウナ所マデ達スルコトガ出來ルデアラウカ、未ダ解決ヲ得テ居ナイガ次ノ事實ハ証明出來ル。

定理6.「点列$k_1, k_2,$ ---------- ハk_0ニ收斂シ，$k=k_0$ノトキ(b')ハ解ヲ持タズ，$k=k_1, k_2,$ ---------- ノトキニハ(b')ハ唯一ツ解ヲ持ツナラバ

$$\varliminf_{j\to\infty} |k_j - k_0| \cdot \| X(k_j) \| > 0$$

デアル」

私ガ注意シタイコトハ此等ノ定理ソノモノデハナク，ソレラガ存在定理2カラ次々ニ一ツナガリトナツテ引出サレタモノデアルトイフコトデアル。