# 308. 多元環ノIdealノ最小公倍數,最大公約數

中山　正（阪大）

Aヲ代數体Kノ上ノ多元環トシ, $\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ ヲAニ於ケル二ツノIdealトスル、タダシ多元環ノIdealトハungleichseitigデモヨイガ、ソノLinks-並ビニRechts-ordnungガMaximalordnungデアル如キモノヲ云フ.（左又ハ右ドチラカノOrdnungガMaximalordnungデアレバ他方モソウデアル）、即チDeuringノ呼ビ方ニ隨ヘバnormalナモノヲ云フコトニスル。

$\mathfrak{a}$ ト $\bar{\mathfrak{a}}$ ノSumme (gr. gem. Teiler) $(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})$ ガ再ビIdealデアルタメニハ, Kノ如何ナルPrimideal $\mathfrak{p}$ ニツイテモ

1) $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \geqq \bar{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{p}}$ 又ハ $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \leqq \bar{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{p}}$

2) $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ ノLinksordnungガ $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{p}}$ ノソレト一致スル.

3) $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ ノRechtsordnungガ $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{p}}$ ノソレト一致ス

ル。

ナル三條件ノドレカガ滿サレテキルコトガ必要且ツ充分デアル。

Durchschnitt (kl. gem. Vielfache) $\mathfrak{a} \frown \bar{\mathfrak{a}}$ ガ Ideal ナルタメニモ全然同ジデアル、即チ $\mathfrak{a} \frown \bar{\mathfrak{a}}$ ガ Ideal ナルトキ $(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})$ モソウデアリ、又ソノ逆ニモナル。

ハジメ以上ノ結果ヲ予想シテ特殊ノ場合ニツイテ角谷氏等ノ御助力ヲ得テ計算シテ見タ所確カニソノ場合ニハ成立シマシタノデ、一般ノ場合ニツイテ證明ヲ試ミマシタ、概要ヲ述ベマス。

(證明) $(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})$ ガ Ideal ナルタメニハドノ $\mathfrak{p}$ ニツイテモ $(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{a}}_\mathfrak{p})$ ガ $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}$ ノ Ideal ナルコトガ必要且ツ充分、又 $\mathfrak{F}$ ガ einfach デ K ガソノ Zentrum ナル時ニ證明スレバヨイ。

1), 2), 3) ノドレカガ成立スレバ $(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{a}}_\mathfrak{p})$ ガ Ideal ナルコトハ明カデ、逆ノ方ガ我々ノ目的デアリマス、以下一ツノ Primideal ノミ考ヘマスカラ $\mathfrak{p}$ ヲ省略シ、$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, $\bar{\mathfrak{a}}_\mathfrak{p}$ ノ代リニ $\mathfrak{p}$ トカキ、K ヲ $\mathfrak{p}$ー進數体トスル。

今 $(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})$ ガ Ideal ナリトスレバ $\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ ハ eigentliche Multiplikation ノ意味デ

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})\mathfrak{r}, \quad \bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})\bar{\mathfrak{r}}$$

トカケル、コヽニ $\mathfrak{b}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{r}}$ ハ ganz + Ideal.

シカシテ 1), 2), 3) ノドレモ成立シナケレバ容易ニワカル如ク

a) $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}_L$ 且ツ $\bar{\mathfrak{r}} \neq \mathfrak{o}_R$

b) $\bar{\mathfrak{b}} \neq \mathfrak{o}_L$ 且ツ $\mathfrak{r} \neq \mathfrak{o}_R$

ノ少クモ一方ガ成立ツ、但シ $\mathfrak{o}_L, \mathfrak{o}_R$ ハ $(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})$ ノ左, 右-Ordnung トスル、ドチラデモ同様ダカラ今 a) ガ成立ツトスル。

然ルニ

$$(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}) = (\mathfrak{b}(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})\mathfrak{r},\ \bar{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})\bar{\mathfrak{r}})$$

カラ

$$(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}) = (\mathfrak{b}(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}),\ (\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})\bar{\mathfrak{r}})$$

ガ導カレ、$(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{o}_L \alpha$ ($\alpha$ ハ Nichtnullteiler in $\mathfrak{o}_L$) トスレバ容易ニ

$$\mathfrak{o}_L = (\mathfrak{b},\ \alpha \bar{\mathfrak{r}} \alpha^{-1})$$

トナル、コヽニ $\mathfrak{b}, \alpha \bar{\mathfrak{r}} \alpha^{-1}$ ハソレゾレ $\mathfrak{o}_L$ ノ ganz ナ右-, 左-Ideal デシカモ $\mathfrak{o}_L$ ト一致シナイ、依ッテ一般ニ $\mathfrak{p}$ 進数体 K ヲ Zentrum ニ持ツ einfache Algebra A ノアル Maximalordnung $\mathfrak{o}$ ノ ganz ナ右-並ビニ左-Ideal $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ ガ $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{o}$ ナラバ $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \neq \mathfrak{o}$ ナルコトヲ証明スレバヨイ。

ソレニハ A ヲ適當ナ $\mathfrak{p}$ 進多元体 D ノ Matrizen-algebra トシテ, シカモ $\mathfrak{o}$ ガ D ノ ganz ナ元ノ行列全体ニナルヤウニ表ハス: $A = D_r$. 然ラバ $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ ハソレゾ

レ

$$\beta=\begin{Bmatrix} \pi^{\mu_1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & \pi^{\mu_2} & 0 \cdots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & \ddots & \\ \cdots & \cdots & & \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & \pi^{\mu_r} \end{Bmatrix}, \qquad \gamma=\begin{Bmatrix} \pi^{\nu_1} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & \pi^{\nu_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \pi^{\nu_r} \end{Bmatrix}$$

デツクラレタ右一，並ビ＝左一 Ideal ＝ナル、但シ $\pi$ ハ D ノ Prim ideal ノ Prim element，$\mu_i$, $\nu_i \geqq 0$，$c_{ik}$ ハ mod $\pi^{\mu_i}$ デ、$d_{ik}$ ハ mod $\pi^{\nu_k}$ デキマル、而シテ $m, n \neq 0$ ナラ $0$ デナイ $\mu, \nu$ ガ存在スル、ヨッテ

$$\mu_1=\mu_2=\cdots\cdots=\mu_{i_0-1}=0, \quad \mu_{i_0}>0$$

$$\nu_1=\nu_2=\cdots\cdots=\nu_{k_0-1}=0, \quad \nu_{k_0}>0$$

トスル、$c_{i,k}\ (i<i_0)=0$, $d_{i,k}\ (k<k_0)=0$ トシテヨイ。

然ル＝ $(m, n)=0$ ナラバ $(m, n)$ ＝ハ

$$\xi=\begin{array}{c} \\ i_0 \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \overbrace{0 \cdots\cdots 0}^{k_0} & * \cdots * \\ \quad 0\,0 & \cdots\cdots \\ 0 \cdots 0\,1 & * \cdots * \\ * \cdots\cdots\cdots & \cdots * \\ * \cdots\cdots\cdots & \cdots * \end{pmatrix}$$

ナル $\xi$ ガアルガ，實際＝

$$\xi=\beta(a_{i,k})+(\bar{a}_{i,k})\gamma$$

（但シ $a_{i,k}$, $\bar{a}_{i,k}$ ハDノ *ganz* ナ元）トオクト

$$a_{i,k}+\bar{a}_{i,k}=0 \quad (i<i_0,\ k<k_0)$$

$$a_{i,k_0}+\sum_{k=1}^{k_0-1}\bar{a}_{i,k}\,d_{k,k_0}\equiv 0 \mod \pi \quad (i<i_0)$$

$$\sum_{i=1}^{i_0-1}c_{i_0,i}\,a_{i,k}+\bar{a}_{i_0,k}\equiv 0 \mod \pi \quad (k<k_0)$$

$$\sum_{i=1}^{i_0-1}c_{i_0 i}\,a_{i k_0}+\sum_{k=1}^{k_0-1}\bar{a}_{i_0,k}\,d_{k,k_0-1}\equiv 1 \mod \pi$$

トナル、今第二ノ $(i_0-1)$ 個ノ式ニ左カラ（掛算ハミナ *nichtkommutativ*）ソレゾレ $c_{i_0 i}$ ヲ掛ケ，第三ノ $(k_0-1)$ 個ニ右カラ $d_{k,k_0}$ ヲ乗ジテ全部加ヘ合セル、而シテ第一ノ式ヲ代入スレバ容易ニ第四ノ式ガ矛盾ニナル。

コレデ主張ノ前半ガ証明サレタ。

最小公倍数 $\mathfrak{a}$ ハ $\bar{\mathfrak{a}}$ ニツイテモ，類似ノ考察ニヨッテ

$$\pi\mathfrak{O}\neq\mathfrak{m}\cap\mathfrak{n}$$

ナル式ノ証明ニ帰セラレル。但シ $\pi$，$\mathfrak{O}$ ハ前ト同ジ意味、(従ッテ $\pi\mathfrak{O}$ ハ $\mathfrak{O}$ ノ *zweiseitig* ノ *Primideal*）且ツ $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ ハ $\pi\mathfrak{O}$ ノ *echter Teiler* ナル $\mathfrak{O}$ ノ右一並ビニ左一整 *Ideal* トスル．然ラバ $\mu_i\leqq 1$, $\nu_i\leqq 1$ デ且ツ $\mathfrak{O}$ ニナル $\mu$, $\nu$ ガ存在スル．今

$$\mu_r=\mu_{r-1}=\cdots\cdots=\mu_{i_0+1}=1,\quad \mu_{i_0}=0$$

$$\nu_r=\cdots\cdots\cdots\cdots=\nu_{k_0+1}=1,\quad \nu_{k_0}=0$$

トシ,

$$a_{i,k}=\bar{a}_{i,k}=0 \qquad (i<i_0 \text{ oder } k<k_0)$$

$$a_{i_0,k_0}=\bar{a}_{i_0k_0}=1$$

$$a_{i_0,k}=d_{k_0,k} \qquad (k_0<k\leqq r)$$

$$\bar{a}_{i,k_0}=c_{i,k_0} \qquad (i_0<i\leqq r)$$

$$a_{i,k_0}=0 \quad (i_0<i), \quad \bar{a}_{i_0,k}=0 \ (k_0<k)$$

$$a_{i,k}=\bar{a}_{i,k}=0 \qquad (i_0<i \text{ 且ツ } k_0<k)$$

トスルト $\beta(a_{i,k})=(\bar{a}_{i,k})\gamma$ トナツテ、コレハ $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{n}$ ニ属シ, 然モ $(i_0, k_0)$ ノ所ハ $1$ デアルカラ $\pi\mathfrak{O}$ ニハ属サナイ、故ニ $\pi\mathfrak{O}\neq\mathfrak{m}\cap\mathfrak{n}$ デ, 主張ガ証明サレタコトニナル。

ナホ我々ノ條件ガ満サレテキルトキニハ

$$N(\mathfrak{a}\cap\bar{\mathfrak{a}})\,N\big((\mathfrak{a},\bar{\mathfrak{a}})\big)=N(\mathfrak{a})\,N(\bar{\mathfrak{a}})$$

ナルコトハ勿論容易ニ証明サレマス。