309. "det. $A \neq 0$ ナル matrix ハ $A=\exp. B$" ノ 正田教授ニヨル証明其他

吉田耕作（阪大）

先日正田教授ト Schröder ノ論文 Einige Sätze aus der Theorie der kont. Gruppen linearer Transf., Dissertation, Berlin. ヲミテヲリマシタラ

複素数体Kノ上ノ n 次ノ matrix A ガ det. $A \neq 0$ ナラバ同ジクKノ上ノ n 次ノ matrix B デ

$$A=\exp. B=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B^m}{m!}, \quad B^0=E \text{（単位行列）}$$

ナレ如キモノガアル。

ヲ直接的ナ計算？デ示シテアリマシタ。正田教授ニヨレバ之ハ次ノ如キ考ヘ方デ簡単ニ証明出来マス。尚南雲教授ハ之ヲ"距離付ケラレタ Ring"ニ擴張サレマシタ（本紙論文）。以下ニ御紹介致シマス。

先ヅ $A=\exp. B$ ト書ケルカドウカハ Aヲ transform シテモ変ラナイ。何者、$PAP^{-1}=\exp.(PBP^{-1})$ ダカラ。又A＝scalar a ヲカケテモ変ラナイ。何者 $aA=(aE)A$ $=\exp.\{(\log a)E\}A, =\exp.\{(\log a)E+B\}$ （$(\log a)E$ ハ全テノ matrix ト commutative）ダカラ。又

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

ナラバ A_1, A_2 ノミニツイテ証明スレバヨイ。何者 $A_1=\exp.(B_1)$, $A_2=\exp.(B_2)$,

$$B_1=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

トスレバ B_1 ト B_2 トハ commutative ダカラ

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}=\exp.(B_1+B_2)$$

トナルカラ。

依ッテ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

ノトキノミ証明スル。$A-E$ ハ nilpotent; $(A-E)^{n-1}=0$;

ダカラ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(A-E)^{\nu}$$

ハ convergent. ヨッテ

$$\exp.\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(A-E)^{\nu}\right)$$

ガ意味ヲ有シ之レハAトナル。何者、$(A-E)^{\nu}$; $\nu=0,1,2,\cdots$

$\cdots\cdots$ハ互ニ commutative ダカラ, $|x-1|<1$ ナル

scalar x ニ對シ

$$\exp.\left\{\ln\left[(1-x)^0-(1-x)\right]\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\left[(1-x)^{\circ}-(1-x)-1\right]^{\nu}\right\}$$

ヲ *formal* ＝ $(1-x)$ ノ *power series* ＝展開シタトキ

$$(1-x)^{\circ}-(1-x)=x$$

ヲ得ルコト＝比較スレバワカル。　　　　—以上—

上ノ定理＝ヨレバ本紙＝於ケル正田教授ノ二ツノ論文（288, 295）＝ヨルト K ＝於ケル *matrix equation*

$$\exp.A\exp.B\exp.(-A)\exp.(-B)=\exp.(CD-DC)$$

ハ A,B ヲ與ヘレバ C,D ガ、又 C,D ヲ與ヘレバ A,B ガ定マル（必ズシモ一意デナイ）如キモノデアルコトガワカル。

尚正田教授ハ次ノ如キ手紙ヲ寄セラレタ。

Satz. *Determinante* 1 ノ *reelle Matrix* ハ二ツノ *reelle* + *Kommutator* ノ *Produkt* トシテ表ハセル。

コレヲ証明スルノ＝ *Hilfssätze* カラ始メマス。

Hilfssatz 1. *Körper* K ノ中ノ *Matrix* ハ *Eigenwert* ガ K ＝含マレルナラ K ノ中ノ *Kommutator* デアル。

Beweis.　紙上談話會＝書イタノ＝同ジ。

Hilfssatz 2. *Matrix* $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ハ a ヲ含ム *Körper* ノ中ノ *Kommutator* デアル。

Beweis. $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

両方ノ Eigenwert ± 1

從ツテ $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ハ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ト或 Matrix ノ Kommutator

デアル。

Hilfssatz 3. $\begin{pmatrix} \rho & \bar{\rho} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho & \bar{\rho} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \rho+\bar{\rho} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho\bar{\rho}=1$

Beweis. 計算ニヨリ明カ。

Satz ノ証明。

Matrix A ヲ reell ナ範囲デ Normalform

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

ニ transform シマス。$|xE-A_i|$ ハ irreduzibles Polynom ノ Potenz デス、コノ各々ニツイテ考ヘマス。

$|xE_i-A_2|$ ガ irreduzibles Polynom $\varphi_i(x)$ ノ Potenz デアルトスルト $\varphi(x)$ ノ grad ハ 1 カ 2 デス。

先ヅ $A_i=\alpha_i A_i^*$, $|A_i^*|=1$ ナル實數 α ガ存在スルコトヲ証明シマス。

$\varphi(x)$ ノ Grad 1 ナラバ

$$A_i \sim \alpha_i F_i, \quad F_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad F_i = A_i^*.$$

$\varphi(x)$ ノ grad 2 ナラバ, $\varphi(x)=x^2+ax+b$, b ハ絶体値故 pos.

故ニ $|A_i|=\beta^{\frac{n}{2}}$, n ノ matrix ノ grad, $\alpha_i=\sqrt{b}$ ト置ケバ

$$A_i \sim \alpha_i A_i^*$$

故ニ

$$A \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & & & \\ & \alpha_2 E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_m E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^* & & & \\ & A_2^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^* \end{pmatrix}$$

左側ノ Matrix ハ Hilfsatz 1 ニアル reell ナ Kommutator. 問題ハ右辺ノ Matrix ガ Kommutator ナルコトヲ示スニアル。ソレニハ各々ノ A_i^* ニツイテ証明スレバヨイ。

$\varphi_i(x)$ ノ Grad 1 ノトキハ矢張リ Hilfssatz 1 ニヨル Kommutator ニナル。

$\varphi_i(x)$ ノ Grad ヲ 2 トスル.

$$A_i^* \sim B = \begin{pmatrix} \rho F & 0 \\ 0 & \bar{\rho} F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix} \times F \qquad (\text{Kronecker ノ Produkt})$$

$$\sim \begin{pmatrix} \rho+\bar{\rho} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times F \qquad (\text{Hilfssatz } 3)$$

$$= M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1} \times N_1 N_2 N_1^{-1} N_2^{-1} \quad (\text{Hilfssatz } 2, 1)$$

$$= (M_1 \times N_1)(M_2 \times N_2)(M_1 \times N_1)^{-1}(M_2 \times N_2)^{-1}$$

コレデ証明出来マシタが餘リ簡單デハアリマセンデシタ。

Schräder ハドンナニ証明シタカ知リマセンが先ヅ御報告

申上マス。

昭和十年度七月——十二月分會費

未拂込ノ方ハ至急下記(振替貯金)

ヘ御拂込ミ下サイ。

(會費未納ノ方多キ爲ニ最近財政困難

デスカラ是非至急御願ヒ致シマス。)

大阪市北區

大阪帝國大學
理學部數學教室 清水辰次郎

口座番號　大阪一七七四三番

本誌上ニ於ケル論文ハナルベク10頁以内ニ御願ヒ致シマス。