317. 點集合論ニ於ケル B. Knaster 氏ノ假設ニ就イテ (I)

近藤基吉 (北大)

W. Sierpinski 氏ハ Fund. Math ノ第十四巻デ B. Knaster 氏ガ次ノ問題

Est cequ'on peut nommer une correspondance qui ferait correspondre à tout ensemble parfait lineaire un de ses points, de sorte qu'aux ensembles différents correspondent des points différents?

ヲ呈出シタト報ジテ居ル. コノ問題ハ實變數函數論ノ現狀デハ到底解カレサウニモナイガ、コノ問題ニ肯定的ナ解決ガ與ヘラレルトスレバ——コノ假設ヲ B. Knaster 氏ノ假説ト呼ブコトニスル——如何ナル集合中函數ガ nommer サレルカト云フ問題ハ必ズシモ困難ナモノデモ無カラウ。夫レノミデハナク此ノ問題ノ解決ハ此頃流行シテ居ル singular set ノ研究ヤ E. Zermelo 氏ノ公理ノ研究ニ一ツノ方向ヲ與ヘルモノデハナイカト思フ、コノ様ナ理由デ最近コノ問題ヲ考ヘテ見タカラ得ラレタ二三ノ結果ヲオ知ラセスル。其

ノタメニ先ヅ定義カラ與ヘテ置カウ。

B. Knaster 氏ノ假設ニ依ツテ一ツノ fonction d'eusemble $\varphi(N)$ ガ nommer セラレNガ任意ノ eusemble parfait lineaire ナル時ニ $\varphi(N)$ ハNノ一点デアリ，且ツ互ニ相異ナレニツノ eusemble parfait lineaire $N_i \ |i=1,2|$ ニ對シテ $\varphi(N_1) \neq \varphi(N_2)$ デアルトスル．然ルトキニ $\varphi(N)$ ニ依ツテ次ノ様ナ集合中函數ガ nommer サレル。、

1. 直線R上ニ互ニ disjoint ナル $2^{\aleph_0}$ 個ノ集合$\{E\}$ヲ定義シテEトR−Eトガ共ニ imparfait デアルヤウニナシ得。

實數xニ對シテ

$$F_x = \sum^{(*)} \varphi(N)$$

ヲ考ヘル。コゝニ $\sum^{(*)}$ ハ borné supérience ガxニ等シイヤウナ eusemble parfait lineaire Nニ對シテノ $\varphi(N)$ ノ和ヲ示ス。然ル時ニ F_x ハ imparfait デアル．何トナレバ F_x ガ完全集合Pヲ含ムトキニハPノ完全部分集合Qデ borné supérience $<x$ ノモノガアル、Qニ對シテ F_x ノ定義カラ $\varphi(Q)$ ハ F_x ニ属シナイ、然ルニ他方ニテ $\varphi(Q) \in Q \subset F_x$ デアル、コレハ互ニ矛盾スル、ソレ故ニ F_x ハ imparfait デアル。

次ニ適當ナル區間Iニ對シテ $I-F_x$ ハ又 imparfait デアルコトヲ証明シテ置カウ。若シ任意ノ區間Iニ對シテ

$I-F_x$ ガ完全集合ヲ含ムナレバ區間

$$\left(-\frac{1}{2n}+x,\ -\frac{1}{2n+1}+x\right) \quad (n=1,2,\text{------})$$

ニハ F_x ト素デ且ツ完全ナル部分集合ガ存在スル、ソノ一ツヲ P_n トシ

$$P=(x)+\sum_{n=1}^{\infty}P_n$$

トスレバ P ハ高々一点 x ヲ除イテ $R-F_x$ ニ含マレル完全集合デ且ツソノ *borné supérieure* ハ x デアル、ソレ故ニ $\varphi(P)\in F_x$ カラ $x=\varphi(P)$ ガ得ラレル。他方ニテ區間

$$\left(-\frac{1}{2n+1}+x,\ -\frac{1}{2n+2}+x\right) \quad (n=1,2,\text{------})$$

ニ含マレ F_x ト素ナル完全集合ノ一ツ Q_n ニ對シテ

$$Q=(x)+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n$$

トオケバ、P ノ場合ト全ク同様ニシテ $x=\varphi(Q)$ ガ得ラレル。ソレ故ニ $\varphi(P)=\varphi(Q)$ デアル。コノコトハ $\varphi(N)$ ノ定義ト矛盾スル、ソレ故ニ區間 I ヲ定義シテ $I-F_x$ 及ビ $I F_x$ ガ共ニ *imparfait* デアル様ニナシ得ル、特ニ I トシテ両端ガ有理点カラナルモノヲ選ブコトガ出來ル。

両端ガ有理点カラナル様ナ區間ノ全体カラナル集合ハヨク知ラレタ様ニ *effectivement* = *dénombrable* デアル、ソレ故ニソレ等ヲ *effectivement* ニ一ツノ *suite* *infinie*

$$I_1,\ I_2,\ \cdots\cdots$$

＝列ベルコトガ出來ル、コレ等ニ對シテRノ部分集合 T_n ($n=1, 2, \cdots\cdots$) ヲ次ノ樣ニ定義スル、即チ $x\in T_n$ ノ時ニ $I_n - F_x$ 及ビ $I_n F_x$ ハ共ニ *imparfait* デアル樣ニスル、然ルトキニハ $R=\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ デアルカラ、W. *Sierpinski* 氏ノ定理 (W. *Sierpinski*: *Hypothèse du Continu*, 6頁ヲ見ヨ) ニ依ッテ T_n ノ中ニハ *puissance* ガ $2^{\aleph_0}$ ノモノガ存在スル、ソノ中デ指數ノ最小ナルモノヲ T_{n_0} トスル、然ルトキニハ $x\in T_{n_0}$ デアル限リ $I_{n_0} - F_x$ 及ビ $I_{n_0} F_x$ ハ *imparfait* デアル、ソン故ニ I_{n_0} ヲ R ニ *topologiquement* ニ變換シテソノ變換ニ依ル $I_{n_0} F_x$ ノ像 N_x ヲ考フレバ $\{N_x\}$ ($x\in T_{n_0}$) ガ求メル集合デアル。

2. 直線R上ニ互ニ *disjoint* ニシテ *effectivement* ニ $2^{\aleph_0}$ 個ノ集合 $\{N_x\}$ ($0\leqq x\leqq 1$) ヲ定義シテ N_x ノ *etendue extérience en mesure* (*massgleiche Hülle*) ガ R デアル樣ニナシ得ル。

任意ノ正數 x ニ對シテ

$$(1)\qquad F_x=\sum_{mes(N)=x} \varphi(N)$$

ト置ク、區間 $(0, 1)$ ニ含マレル無理數

$$\nu=\frac{1|}{|n_1}+\frac{1|}{|n_2}+\cdots\cdots+\frac{1|}{|n_k}+\cdots\cdots$$

ニ對シテ

$$E_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} F\frac{1}{2^n}x_\nu$$

ヲ考ヘル、但シコンデ

$$x_\nu = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{2n_1}} + \frac{1}{2^{2n_1+n_2}} + \frac{1}{2^{2n_1+n_2+n_3}} + \cdots\cdots$$

トスル、然ルトキニ $\{E_\nu\}$ ガ求メル集合デアル、先ヅ $\mu \neq \nu$ ノトキニ $E_\mu E_\nu = 0$ ヲ証明スル、若シ $p \in E_\mu E_\nu$ ナレバ $p \in F\frac{1}{2^m}x_\mu F\frac{1}{2^n}x_\nu$ ノ成立スル自然数 m, n ガ存在スル、コレ等ニ對シテ $\frac{1}{2^m}x_\mu = \frac{1}{2^n}x_\nu$ ガ成立シ、コレヨリ $x_\mu = x_\nu$ ガ得ラレル、コレハ $\mu \neq \nu$ ト矛盾スル、ソレ故ニ $\mu \neq \nu$ ノ時ニ $E_\mu E_\nu = 0$ ガ成立スル、次ニ E_μ ノ etendue extérience en mesure ガ R デアルコトヲ証明スル、E_μ ノ etendue extérience en mesure ガ R ト équivalent デナイトスレバ $R-E_\mu$ ノ mesure intérience>0 デアルカラ $R-E_\mu$ ハ mesure >0 ノ完全集合ヲ含ム、ソノ中ノ一ツヲ P トスル、十分大ナル自然数 n ニ對シテ P ハ mesure $\frac{1}{2^n}x_\mu$ ノ完全集合ヲ含ム、ソノ一ツヲ Q トスレバ $\varphi(Q) \in F\frac{1}{2^n}x_\mu$ デアル、コレハ P ガ E_μ ト互ニ素ナル事實ニ矛盾スル、ソレ故ニ E_μ ノ etendue extérience en mesure ハ R デアル。

3. 直線 R 上ニ互ニ素ナル effectivement ニ $2^{\aleph_0}$ 個

ノ集合 $\{N_x\}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ ヲ定義シテ N_x ノ *étendue extérience en catégorie* ガRデアル様ニナシ得ル。

(1) ノ代リニ

$$F_x = \sum_{\delta(N)=x} \varphi(N)$$

ヲ考ヘル、但シ $\delta(N)$ ハNノ *diametre* ヲ示ス、然ルトキニ *proposition* 2ト同様ニシテ *proposition* 3ガ証明セラレル。