320. 函數ノ多葉性ニ就テ

南　　右　内（札幌一中）

任意ノ凸領域Aニ於テ次ノ函數ヲ考ヘル。

$$f(z)=\frac{a}{z}+g(z);\quad \text{但シ } g(z) \text{ ハAデ正則，}$$

a ハ任意常數。

コノ函數ノ單葉性ニ就テハ前ニ述ベタガ今回ハソノ多葉性ニ就テ研究スル。

定理. $f(z)=\dfrac{a}{z}+g(z)$ ヲ凸領域Aニ於テ定義セラレタ函數トシ，$g(z)$ ハAニ於テ正則トス。コノトキ

1° $w=g^{(p)}(z)$ $(z\in A)$ ハ w-plane ノ凸領域 $\mathfrak{A}$ ノ内部ニアル。

2° z-plane ニ於ケル扇形Bガ $w=\dfrac{(-1)^{p+1}p!\,a}{z^p}$ ニヨッテ w-plane ノ扇形 $\mathfrak{B}$ ニ寫像サレテ $\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}=0$ デアル。

ガ成立スレバ $f(z)$ ハ $A\cdot B$ ニ於テ高々 p 葉デアル。

定理ノ證明ヲスル前ニ次ノ補助定理ヲ述ベル。

補助定理 1. 任意ノ凸領域Aニ於テ正則ナ函數 $g(z)$ ヲ考ヘル。

Aニ属スル点 $z_1, z_2, \text{---------}, z_p, z_{p+1}, \text{---------}$ ヲ取リ順次ニ

$$\Delta_0(z_1)=g(z_1)$$

$$\Delta_1(z_2,z_1)=\frac{g(z_2)-g(z_1)}{z_2-z_1}$$

$$\Delta_p(z_{p+1},z_p,\cdots\cdots,z_1)$$
$$=\frac{\Delta_{p-1}(z_{p+1},z_{p-1},\cdots,z_1)-\Delta_{p-1}(z_p,z_{p-1},\cdots\cdots,z_1)}{z_{p+1}-z_p}$$

ヲ作レバ

$$\Delta_p(z_{p+1},z_p,\cdots\cdots,z_1)$$
$$=\int_0^1\int_0^1\cdots\cdots\int_0^1 g^{(p)}\left[z_1+(z_2-z_1)t+\cdots\cdots+(z_{p+1}-z_p)tt_1\cdots\cdots t_{p-1}\right]$$
$$t^{p-1},\ t_1^{p-2},\cdots\cdots,t_{p-1}\,dt\,dt_1\cdots\cdots dt_{p-1}$$

ガ成立ツ。（本誌30号、木村氏論文参照）

補助定理II. 函数 $\varphi(z)$ ハ任意ノ凸領域 A ニ於テ定義セラレタ正則函数ニシテ $z\in A$ ノトキ $\varphi(z)\in\mathfrak{A}$ トス。（$\mathfrak{A}$ ハ凸領域）

然ルトキハ A ニ属スル一ツノ正則曲線 C; $z=z(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ ヲトレバ

$$p\int_0^1\varphi[z(t)]\,t^{p-1}dt\in\mathfrak{A}\qquad p=0,1,2,\cdots\cdots$$

証明. $0\leqq t\leqq 1$ ノ時 $z(t)\in A$ ニシテ $z\in A$ ノトキ $\varphi(z)\in\mathfrak{A}$ ナル故、$\varphi[z(t)]\in\mathfrak{A}$. $0\leqq t\leqq 1$ ナルトキ $t^{p-1}>0$ デアルカラ

Weierstragesche Mittelwertsatz ニヨリ

$$\frac{\int_0^1 \varphi[z(t)]\, t^{p-1}\, dt}{\int_0^1 t^{p-1}\, dt} \in \mathfrak{a}$$

$$\therefore \quad p\int_0^1 \varphi[z(t)]\, t^{p-1}\, dt \in \mathfrak{a}$$

補助定理III. $z \in A$ ノトキ $g^{(p)}(z) \in \mathfrak{a}$ トシ $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_{p+1} \in A$ ナラバ

$$p!\, \Delta_p(z_{p+1}, z_p, \cdots\cdots, z_1) \in \mathfrak{a}$$

証明、 補助定理 II ニ於テ $\varphi(z) = g^{(p)}(z)$ トヲキ

$$z = z(t, t_1, \cdots\cdots, t_{p-1}) = z_1 + (z_2 - z_1)t + \cdots\cdots + (z_{p+1} - z_p)\, t t_1 \cdots\cdots t_{p-1}$$

$$[0 \leqq t \leqq 1,\ 0 \leqq t_1 \leqq 1, \cdots\cdots, 0 \leqq t_{p-1} \leqq 1]$$

トオケバ $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_{p+1} \in A$ ナル故 $z(t, t_1, \cdots\cdots, t_{p-1}) \in A$ ナリ。

従ッテ

$$g^{(p)}[z(t, t_1, \cdots\cdots, t_{p-1})] \in \mathfrak{a}$$

故ニ補助定理IIヨリ

$$p\int_0^1 g^{(p)}[z(t, t_1, \cdots\cdots, t_{p-1})]\, t^{p-1}\, dt \in \mathfrak{a}$$

次ニ補助定理IIニ於テ

$$\varphi(z) = p\int_0^1 g^{(p)}[z(t, t_1, \cdots\cdots, t_{p-1})]\, t^{p-1}\, dt$$

トヲケバ

$$(p-1)\int_0^1\left\{p\int_0^1 g^{(p)}[z(t,t_1,\cdots\cdots,t_{p-1})]\,t^{p-1}dt\right\}t_1^{p-2}dt_1\in\mathfrak{a}$$

即チ $$p(p-1)\int_0^1\int_0^1 g^{(p)}[z(t,t_1,\cdots\cdots,z_{p-1})]\,t^{p-1}t^{p-2}dt\,dt_1\in\mathfrak{a}$$

以下同様ニコノ方法ヲ繰返セバ

$$p!\int_0^1\int_0^1\cdots\cdots\int_0^1 g^{(p)}[z(t,t_1,\cdots\cdots,t_{p-1})]\,t^{p-1},t_1^{p-2},\cdots\cdots,t_{p-1}$$

$$dt\,dt_1\cdots\cdots dt_{p-1}\in\mathfrak{a}$$

即チ $p!\,\Delta_p(z_{p+1},z_p,\cdots\cdots,z_1)\in\mathfrak{a}$

定理ノ証明

A・B ニ属スル任意ノ $p+1$ 個ノ点 $z_1,z_2,\cdots\cdots,z_{p+1}$ ヲ

取リ

$$\bar{\Delta}_0(z_1)=f(z_1)$$

$$\bar{\Delta}_1(z_2,z_1)=\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\bar{\Delta}_p(z_{p+1},z_p,\cdots\cdots,z_1)$$

$$=\frac{\bar{\Delta}_{p-1}(z_{p+1},z_{p-1},\cdots,z_1)-\bar{\Delta}_{p-1}(z_p,z_{p-1},\cdots,z_1)}{z_{p+1}-z_p}$$

ヲ作レバ順次

$$\bar{\Delta}_0(z_1)=\frac{a}{z_1}+g(z_1)=\frac{a}{z_1}+\Delta_0(z_1)$$

$$\bar{\Delta}_1(z_2,z_1)=\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}=\frac{1}{z_2-z_1}\left[\left(\frac{a}{z_2}+g(z_2)\right)\right.$$

$$-\left(\frac{a}{z_1}+g(z_1)\right)\Big] = \frac{-a}{z_1 z_2} + \Delta_1(z_2, z_1)$$

トナリ一般ニ

$$\bar{\Delta}_p(z_{p+1}, z_p, \text{-----}, z_1) = \frac{(-1)^p a}{z_1 z_2 \text{----} z_{p+1}} + \Delta_p(z_{p+1}, z_p, \text{-----}, z_1)$$

$$\therefore \quad p!\,\bar{\Delta}_p(z_{p+1}, z_p, \text{-------}, z_1)$$

$$= -\left[\frac{(-1)^{p+1} a\, p!}{z_1 z_2 \text{------} z_{p+1}} - p!\,\Delta_p(z_{p+1}, z_p, \text{------}, z_1)\right]$$

然ルニ假定ヨリ $\dfrac{(-1)^{p+1} a\, p!}{z_1 z_2 \text{-----} z_{p+1}} \in \mathfrak{B}$

補助定理Ⅲヨリ $p!\,\Delta_p(z_{p+1}, z_p, \text{-------}, z_1) \in \mathfrak{A}$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} = 0$ デアルカラ

$$\frac{(-1)^{p+1} a\, p!}{z_1 z_2 \text{-----} z_{p+1}} \neq p!\,\Delta_p(z_{p+1}, z_p, \text{------}, z_1)$$

故ニ $\quad \bar{\Delta}_p(z_{p+1}, z_p, \text{-------}, z_1) \neq 0$

即チ $\quad f(z) = \dfrac{a}{z} + g(z)$ ハ A·B ニ於テ高々 p 葉デアル。

系 1. $\quad f(z) = \dfrac{1}{z} + g(z)$ ヲ凸領域 A ニ於テ定義セラレタ

函數トシ，$g(z)$ ハ A デ正則トス．コノトキ

B ヲ $|z| < \rho$ トスレバ $\mathfrak{B}$; $|w| > \dfrac{p!}{\rho^{p+1}}$

故ニ $\mathfrak{A}$ ハ $|w| < \dfrac{p!}{\rho^{p+1}}$ ナラバ良イコトニナル、從ッテ次

ノ定理ヲ得ル。

"任意ノ凸領域Aニ於テ $g(z)$ ガ正則ナルトキ

$f(z)=\frac{1}{z}+g(z)$ ヲ考ヘル。

モシモAニ於テ $\left|g^{(p)}(z)\right|<\frac{p!}{\rho^{p+1}}$ ナラバ $f(z)$ ハA・B

即チ $|z|<\rho$ トAトノ共通部分デ高々P葉デアル。"

コレヨリ直チニ次ノ定理ガ得ラレル。

"$f(z)=\frac{1}{z}+g(z)$ ガ $0<|z|<r$ デ正則デ且ツココデ

$$\left|\frac{z^{p+1}f^{(p)}(z)}{(-1)^p p!}-1\right|<1$$

ナラバ $0<|z|<r$ デ高々P葉デアル。"

之レ即チ木村氏ガ本誌30号デ得ラレタモノデアル。

系2. 同様假定ノ元ニ

B; $|z|>\rho$ トスレバ $\mathcal{B}$; $|w|<\frac{p!}{\rho^{p+1}}$ トナル。

故ニ α ハ $Re^{i\alpha}g^{(p)}(z)>\frac{p!}{\rho^{p+1}}$ (α ハ任意ノ実数)

ナラバ良イコトニナル。

即チ次ノ定理トナル。

"$f(z)=\frac{1}{z}+g(z)$ ヲ凸領域Aデ定義セラレタ函数,

$g(z)$ ハAデ正則トス、若シAデ

$$Re^{i\alpha}g^{(p)}(z)>\frac{p!}{\rho^{p+1}}$$

ナラバ $|z|>\rho$ トAトノ共通部分デ高々P葉ナリ。"

系3. 本定理ニ於テ $a=0$ トスレバ $f(z)$ ハAニ於テ正則ナ

函数トナル。コノトキBトシテ全平面ヲトレバ $\mathcal{B}$ ハ

w-plane ノ原点トナル、即チ α ハ原点ヲ含マナイ凸領域ナラバ良イコトニナル。

〃 $f(z)$ ヲ凸領域 A ニ於テ正則トスルトキ A ニ於テ $Re^{i\alpha}f^{(p)}(z)>0$ (α; 實常數) ナラバ $f(z)$ ハ A ニ於テ高々 p 葉ナリ。〃

書キ落シマシタガ系Ⅰハ又次ノ形ニモ述ベラレマス。

〃 任意ノ凸領域 A ニ於テ $g(z)$ ヲ正則トシテ $f(z)=\frac{1}{z}+g(z)$ ヲ考ヘル $\max\limits_{z\in A}|g(z)|=M$ トスレバ $|z|<\sqrt[p+1]{\frac{p!}{M}}$ ト A トノ共通部分デ高々 p 葉ナリ。〃

以上 —— 1935. 12. 21. ——