

321. 單葉函數ニ就イテ

城 憲 三 (阪大工)

① $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ $\forall |z| < 1$ = 於ケル正則單葉函數トシ,

Nevanlinna 変換:

$$(1) \quad h(\zeta) = \frac{-f\left(\frac{-\zeta+z_1}{1-\bar{z}_1\zeta}\right) + f(z_1)}{f'(z_1)(1-|z_1|^2)} = \zeta + \dots$$

ヲ考ヘルト, $h(\zeta)$ ハ $|\zeta| < 1$ デ正則單葉デアル. $z_2 = \frac{-\zeta+z_1}{1-\bar{z}_1\zeta}$

トオケバ $|z_2| < 1$ デアツテ

$$(2) \quad \zeta = \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}$$

トナル。 (1), (2) ヨリ

$$(3) \quad \frac{h(\zeta)}{\zeta} = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{f'(z_1)(1-|z_1|^2)} \cdot \frac{1 - \bar{z}_1 z_2}{z_1 - z_2}$$

而シテ Grunsky の第一定理 (Dissertation 参照)

ヨリ

$$(4) \quad \left| \log \frac{h(\zeta)}{\zeta} + \log(1-|\zeta|^2) \right| \leq \log \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}$$

デアルカラ, (4) = (3) ヲ代入シテ次ノ主要定理が得ラレル。

$$(5) \quad \left| \log \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \cdot \frac{1 - \bar{z}_1 z_2}{f'(z_1)(1-|z_1|^2)} + \log \left(1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| \right) \right|$$

$$\leq \log \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|^{*})}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}$$

(5)ハ從來單葉函數論 = 知らレテキル非帯 = 多クノ定理ヲ含ン
 デキル。面白イカラ導キ出シテ見ヨウ。

I. $z_1 = 0, z_2 = z_0$ トオケバ

定理 1. $\left| \log \frac{f(z_0)}{z_0} + \log(1 - |z_0|^2) \right| \leq \log \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|}$

II $z_2 = 0, z_1 = z_0$ トオケバ

$$\left| \log \frac{f(z_0)}{z_0} \cdot \frac{1}{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)} + \log(1 - |z_0|^2) \right| \leq \log \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|}$$

或ハ

定理 2. $\left| \log \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right| \leq \log \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|}$, (Grusky, 等定理)

系 $\frac{1 - |z_0|}{1 + |z_0|} \leq \left| \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right| \leq \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|}$, (Nevanlinna, 定理)

III. (5), 左辺ノ絶対値記号内ノ實數部ハ、ミヲ考ヘルト

定理 3. $\left(\frac{1 - |z_1|}{1 + |z_1|} \right)^2 \cdot \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2|}{(|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|)^2} \leq \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right|$

*) $\log \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|} \equiv D(z_1, z_2)$ ハ z_1, z_2 ニ点間ノ non-Euclidean

distance ヲ表ハスカラ、モ少シ幾何學的ナ意見ヅケラシタイ様

ナ氣カスル。(G. Julia, Principes géométriques d'analyse I, p. 39 参照)

$$\leq \left(\frac{1+|z_1|}{1-|z_1|} \right)^2 \cdot \frac{|1-\bar{z}_1 z_2|}{(|1-\bar{z}_1 z_2|+|z_1-z_2|)^2} \quad (\text{Szegő, 定理})$$

上ノ定理 = 於テ $z_1=0, z_2=z_0$ トオケバ

$$\text{系 1. } \frac{1}{(1+|z_0|)^2} \leq \left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| \leq \frac{1}{(1-|z_0|)^2}, \quad (\text{ Bieberbach, 定理})$$

又 $z_2 \rightarrow z_1$ ナル極限ヲ考ヘ $z_1=z_0$ ト書ケバ

$$\text{系 2. } \frac{1-|z_0|}{(1+|z_0|)^3} \leq |f'(z_0)| \leq \frac{1+|z_0|}{(1-|z_0|)^3}, \quad (\text{ Bieberbach, 定理})$$

IV. (5), 左辺ノ絶対値記号内ノ虚数部分ノミヲ考ヘル下,

$$\text{定理 4. } \left| \arg \frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2} - \arg f'(z_1) \right| \leq \log \frac{1 + \left| \frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2} \right|} + \arg(1-\bar{z}_1 z_2)$$

$z_1=0, z_2=z_0$ トオケバ

$$\text{系 1. } \left| \arg \frac{f(z_0)}{z_0} \right| \leq \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}.$$

$z_2=0, z_1=z_0$ トオケバ

$$\text{系 2. } \left| \arg \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right| \leq \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$$

(注意) 系 1, 系 2 ハ夫々定理 1, 定理 2 カラモ出ル。

$$\text{系 3. } \left| \arg \frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2} \right| \leq \log \frac{1 + \left| \frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2} \right|} + \arg(1-\bar{z}_1 z_2) \\ + \left| \arg f'(z_1) \right|$$

他ノ拙論ヲ述ベテ様 =

$$\text{定理 5. } \left| \arg f'(z_1) \right| \leq 2|a_2| r + \frac{3}{2} r \log \frac{1+r}{1-r} \cdot \textcircled{H},$$

$$r=|z_1|, 0 < \textcircled{H} < 1$$

テアルカラ

$$\text{系 3'. } \left| \arg \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \leq \log \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|} + \arg(1 - \bar{z}_1 z_2)$$

$$+ 2|a_2|r + \frac{3}{2}r \log \frac{1+r}{1-r} \textcircled{H}, \quad (r = |z_1|).$$

系 3' の定理 5 の擴張デアール。($z_2 \rightarrow z_1$ を考へる)

以上 = ヨツテ從來未知デアツタ $\log \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}$ の Wertbereich が大体分ツタコト = ナル, $|z| > 1$ デ normieren シテ 單葉寫像函數 $\varphi(z) =$ 對シテ, $\log \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{z_1 - z_2}$ の Wertbereich は Grötzsch = ヨツテ完全 = 研究サレテアツタ。(Grötzsch, Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig, 84 (1932), 269-278)

[2] Rengel の Dissertation 中、 Satz IV カラ Block 常數ノ値ノ評價ニ関シ注意シタコトガアリ, Robinson ノ論文ニアルコトノ直接的ナ説明ヲシタコトガアレガ, モーツ同ジ Dissertation 中、 Satz X トシテ次ノコトガ掲ゲテアル。(K_0 ハ單位円: $|z| < 1$ を表ハストス。)

$w = f(z)$ bilde K_0 schlicht normiert so ab, daß in der w -Ebene ∞ von 0 aus auf keinem Halbstrahl durch 0 erreichbar ist, ohne den Bildrand γ zu treffen. Die Entwicklung in 0 sei

$$f(z) = z + a_{2n+1} z^{2n+1} + a_{2n+1} z^{2n+1} + \dots + a_{\nu n+1} z^{\nu n+1} + \dots$$

mit reellen Koeffizienten. Dann gilt

$$(6) \quad |a_{n+1}| \leq \frac{2}{n},$$

$$(7) \quad a_{2n+1} \geq \frac{n+1}{2} a_{n+1}^2 - \frac{1}{n}.$$

(7)ハ Rogosinski ノ一定理ノ擴張 = ナツテキル。^{**)}

ココ = 注意シタイコトハ、係數が一般 = 複素數デアツテモ (6)ハ成立スルコト勿論 = シテ (明ラカナルガ故 = 説明省略), (7)ハ次ノ様 = 擴張出來ル。

$$(8) \quad \left| \frac{n+1}{2} a_{n+1}^2 - a_{2n+1} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

(8)ハ可成リノ應用性ヲ有スルモノト信スル、事實 $n=1$ ナルトキ = 成立スル、 $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ ナル不等式ハ尙未知ノ事實ヲ解決スル能力ヲ有スル。

(8)ノ証明ハ尙單デアイル。K. Löwner ノ定理 = ヨリ

$$a_{n+1} = -\frac{2}{n} \int_0^\infty K(\tau) e^{-\tau} d\tau,$$

$$a_{2n+1} = 2 \frac{n+1}{n^2} \left[\int_0^\infty K(\tau) e^{-\tau} d\tau \right]^2 - \frac{2}{n} \int_0^\infty K^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau, \quad |K(\tau)| = 1$$

デアイルカラ

$$(9) \quad \frac{n+1}{2} a_{n+1}^2 - a_{2n+1} = \frac{2}{n} \int_0^\infty K^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau.$$

$|K(\tau)| = 1$ デアイルカラ上式ヨリ (8)ガ得ラレル。

— (以上) —

***) Rogosinski ノ定理

$\Delta_u(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots$ ヲ $|z| < 1$ デア正則單葉トシ係數ハ全部實數デアルトスレバ

$$a_5 \geq -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} a_3^2 \geq -\frac{1}{2}.$$

Math. Zeitschr. 35 (1932), S. 121 参照.