

322. Generalised Harmonic Analysis = 就イテ。(I)

北川 敏男 (阪大)

1. N. Wiener ハソノ論文 *Janberian Theorems* (1932) ヲ結ゲ=際ソ、氏ノソコ=展開シタ *Janberian theory* ガ *Neumann-Stone* 等ノ *calculus of operators* =ヨリ再検討サレル日ノ近キヲ豫想スルト、述ベテ居ル。實際、コノ論文及ビユレ=先立ツ *Generalised Harmonic Analysis* (1930) ノ結果ハ *Hilbert* 空間=於ケル *spectral theory* ト著シイ類似点ヲモツ。

以下、*Wiener* ノユノ課題=ツイテ最近考ヘテ居ルコトヲ別=順序モ立テズ申シ述ベタイト思フ。

2. *Wiener* ガソノ著書 *The Fourier Integral* デ定義シタ函数ノ *class S* ヲ考ヘル。即チ *S* ハ次ノ如キ $f(x)$ ノ全体オラナル:

$f(x)$ ハ $(-\infty, \infty)$ デ *Measurable* デアリ且ツスベテノ x =ツイテ

$$(1) \quad \phi(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+\xi) \overline{f(\xi)} d\xi$$

ガ存在スルモノトスル。

今吾々ハ、コノ *S* =於イテ、任意ノニツノ函数 f, g = 關シテ

$$(2) (f, g) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\xi) \overline{g(\xi)} d\xi$$

＝由リ *inner product* (f, g) を定義シマウ。然ルトキ
コレカラ *Hilbert 空間論*＝於ケル如ク、

$$(3) (i) (x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$(ii) (\alpha x + \beta x', y) = \alpha(x, y) + \beta(x', y)$$

$$(iii) (x, x) \geq 0$$

ヲ得ルコトハ容易ニカカル。更ニ、 S ＝於イテ絶対値、距離等
同様ニ定義シタルコトハ言フマデモナイ。又、 S ノ任意ノ有
限個ノ *Element*＝對シテ、

コレニ、一次独立ノ *Element* が常ニ存在スルコトハ
 B^2 *almost periodic function* が S ニ含マレテ居
ルコトニ注意スレバヨイ。依ツテ *Hilbert 空間*＝ナルタ
メニハ、

$$(4) 4.1. (x, x) = 0 \text{ ナルトキ } x = 0$$

$$4.2. S \text{ノ separability}$$

$$4.3. S \text{ノ completeness}$$

ノ三事實が要スルノミデアアルガ——4.1.ハ暫ク措ク——4.2.
ノ成立シナイコトハ明カデアアル。蓋シ S ハ *almost periodic
function*ノ全体ヲ含ムカラ。ソコデ、吾々ハ、 S ＝對シ
テ、既知ノ理論ヲ適用シマウトスレバ、ソレハ、*Rellich,*
Löwner 等ニ依ル廣義ノ一クリッド空間ノ *spectral theory*
＝埃ツ外ハナイノデアアル、但シ假リニ、4.3.ガ確保サレタト

スレバデアル。

然ルニ、4.3.ハ 成立スルコトデアルカ、更ニハ、ソノ
成否が容易ニ証明サレルコトデアロウカ? 筆者ハ、コレニ
ツイテ諸賢ノ御教示ヲ仰ギタイト思フモノデアルガ、シオシ
今筆者が追マウトスル方針ハ、4.3.ヲ証明シテ行カウト云フ
ノデ、ハナイ。寧ロコレヲ回避スル立場ヲトル。

Wienerノ理論ヲ通覧スルトキ、空間 S ノ Completeness
ハ、何処ニモ必要トシテ居ラナイコトヲ看ルノデアツ
テ、氏ノ理論ノ検討ニ之レヲ確立シテカラデナクテハ進マレ
ナイ様デハ、餘リニ迂路ヲ經ルトノ感ヲ抱カナケレバナラヌ
カラデアル。

3. Completenessヲ避ケルト云ツテモ、コレカラ述
ベルコトハ、如何ナル立場カラ Wienerノ理論が如何ニ眺
メラレルカトイフニ止マリ、別ニ Rellich, Löwnerノ外
ニ新シイコトヲ考ヘマウト志スノデハナイ。要スルニ、以下
ノ考察ハ、次ノ四項ニ盡キル:

(i) S ニ對シテコレヲ含ム空間、即チ S ノ Elementガ
悉クソレニ屬スルマウナ空間ノ集合 $S \in$ ヲ考ヘル。

(ii) コレニ各空間 $S \in$ ハ、廣義ゆーくりウど空間⁽¹⁾デア
ルトスル。(以下デハ實ハ Hilbert空間ニナツテキル)

(iii) 空間 $S \in$ ニ於イテ定義サレタ inner productヲ
 $(f, g) \in$ デ表ハス。然レトキ f 及ビ g ガ S ニ屬スルトキ常
ニ次ノ關係が成立スルトスル:

$$(5) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f, g)_\epsilon = (f, g)$$

(iv) S_ϵ = 於イテハ、Rellich, Löwner ノ理論 = 由ル spectral theory が成立ツヌカラ (5) = ヨツテ (f, g) ノ representation ヲ得ル。

以上デ方針ハ盡キルノデ、識 = ワカリキツタコト = 過ギナイノデアアルガ、Wiener ノ方法 = 必要ナコトハ、コレガケデアルマウ = 思ハレル。次節 = 於イテコレヲ具体的 = 述べマウ。

4. 今或ル定マツタ任意ノ正数 ϵ = 對シテ

$$(6) \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(\xi) \frac{\sin \epsilon \xi}{\sqrt{\epsilon \xi}} \right|^2 d\xi < \infty$$

ナル如キ f ノ 全体 = 考ヘ、カールニツノ函数 f, g = ツイテソレヲ inner product トシテ

(1) 以下 = 見ラレル如ク S_ϵ ハ通常ノ Hilbert 空間デ separability ヲ成テスル。ココ = 議論ノ方針トシテハ、 S_ϵ ハ廣義ノ ϵ -リッド空間デアツテヨイコトヲ強調シテオク。蓋シ Wiener ノ諸定理ヲ見ルニハ、Stone ノ定理 (§4 参照) ノミガ必要デアツテ、コレハ $\{V_t\}$ が t = 周シテ連続ナラバ、Bochner ノ議論デ廣義ノ ϵ -リッド空間 = 於イテモソノマム 成テ立ツカラデアアル。(コノコトハ吉田耕作氏ガ嘗ツテ本誌デ指摘サレタコトデアアルカラ 御参照ヲ乞フ。)

$$(7) (f, g)_E = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \overline{g(\xi)} \frac{\sin^2 \epsilon \xi}{\epsilon \xi^2} d\xi$$

ヲ採用シ、絶対値、距離ヲ通常ノ如ク

$$(8) \text{絶対値 } |x|_E = \sqrt{(x, x)_E}$$

$$\text{距離 } |x - y|_E$$

ヲ定義スル。コレヲ空間 S_E ト云フ。コレニツイテ、以下ノ議論ニ要用ナコトハ次ノ I, II ノ性質デアリ:

I. 明カニ S_E ハ一ツノ Hilbert space ヲ形成スル。蓋シ $S_E =$ 任意ノ函数 $f(\xi)$ ヲトルトキ Hilbert space $L^2(-\infty, \infty)$ ニ於テ

$$(9) f(\xi) \frac{\sin \epsilon \xi}{\epsilon \xi}$$

ナル函数ヲ考ヘル、コノ對應ハ一對一デアリ、isometric デアルカラデアリ (7) 参照)。

依ツテ $S_E =$ 於イテ spectral theory が、成立スルノデアリガ、以下ニ必要ナコトハ

(i) Unitary Operator, One-parameter group $\{U_t\}$ = 関スル Stoneノ定理一即チ

$$(10) (U_t f, g)_E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d(E_\lambda(\omega) f, g)_E$$

(ii) コノ $\{U_t\}$ オラ $S_E =$ 於ケル Operator, Schar $\{\Lambda_\lambda\}$ ヲ次ノ關係ニヨリ定義スル。

$$(11) \quad \Lambda_\delta f = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) U_{t+\delta} f dt$$

但シ、コレニハ例ヘバ、 $K(t)$ が $(-\infty, \infty)$ デ有界且ツ可測
而シテ

$$(12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |K(t)|^2 (1+|t|^2) dt < \infty$$

デアレバ充分デアイル。

然ルトキ

$$(13) \quad (\Lambda_\delta f, g)_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{it\lambda} dt \right) d(E_\epsilon(\lambda) f, g)_\epsilon$$

II. (i) S = 属スル f ハ又 S_ϵ = 属スル。茲 = ϵ ハ任意ノ
正数デアイル。

吾々ノ議論デ主要ナコノ事實ハ、 f が S = 属スルトキ

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi)|^2}{1+|\xi|^2} d\xi < \infty$$

ヲ示セバヨイ。コレニ對ヘルニハ、Wiener: The Fourier
Integral 定理 20 ヲ用キル。

(ii) S = 属スル任意ノニツノ f, g = ツイテ

$$(15) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f, g)_\epsilon = (f, g)$$

コレニ對シテハ Wiener 定理 21 ヲ modify スル。即チ

(1) コノ意味ハ例ヘバ Bochner Neumann Operational-
differential equation I., Part I. Preliminaries 1
ヲ見ラレタシ。

定理 21 ハ

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f, f)_\epsilon = (f, f)$$

ヲ示シテキルノデアルカラ。