

328. 函数方程式ニ就イテ, IV

福原満洲雄(北大)

Aノ点トBノ点トノ和トシテ表ハサレル点ノ集合ヲ $\{A, B\}$ ヲ表ハスコトニスル。Eハ完備シタ線状D空間(*espace linéaire, normé et complet, Banach*)ノB型空間), $F(x)$ ハ有界子集合ヲ *complètement continue* デアル一^次函数トシ,

$$(1) \quad X - F(X) = 0$$

トナルヤウナ X ノ集合ヲ M , $X =$ 開スル方程式

$$(2) \quad X - F(X) = x$$

ガ解ヲ持ツヤウナ x ノ集合ヲ A トスル。

定理9. 「 $\{A, M\}$, AM ハ共ニ一^次開集合デアアル」

定理10. 「 AM ガ0ガケカラ成ルコトト, $\{A, M\}$ ガE

ト一致スルコトトハ同等デアル」

コレカラ

定理II. 「 $X = \text{閉スル方程式}$

$$(3) \quad X - \text{是} F(X) = 0$$

ノ固有値, 即チソレガ0デナイ解ヲ持ツヤウナ λ ノ値ハ孤立シテ居ル」

コトガ証明サレル。今迄定理ノ証明ハ殆ンド全部省略シテ, 單ニ一例トシテ定理Iノ証明ヲサツト述べタダケデアツタガ, ソレハドウイフ順序デ定理IIニ達シタカ, ソノ経路ヲハツキリサセタイ爲メデアツタ。次ニ定理IIノ証明ヲ述べヨウ。

簡單ノタメ $\lambda = 1$ ヲ固有値トスル。

$$E = E', \quad A = A'$$

ト置キ, 一般ニ β ヲ或ル順序数トシタトキ β ヨリ小サイ $\alpha =$ 對シテ A^α, E^α ガ定義サレタモノトスル。 β ノ直前ノ順序数が存在シナイナラバ

$$E^\beta = \prod_{\alpha < \beta} E^\alpha$$

ト置キ, β ノ直前ノ順序数 $\beta-1$ ガ存在スルナラバ

$$E^\beta = \{A^{\beta-1}, M\}$$

ト置キ, (2)ヲ満足スル X ガ E^β ノ中ニ存在スルヤウナ \mathcal{X} ノ集合ヲ A^β トスル。 $\{E^\alpha\}, \{A^\alpha\}$ ハ共ニ一次閉集合ノ減少列トナルカラ

$$E^{\gamma} = E^{\gamma+1} = \dots, A^{\gamma} = A^{\gamma+1} = \dots$$

トナルヲナ γ が存在スル。 (2) 7 $E^{\gamma} =$ 於ケル方程式ト考ヘレバ

$$\{A^{\gamma}, M\} = E^{\gamma+1} = E^{\gamma}$$

デアルカラ $A^{\gamma}M$ ハ 0 ダケカラ成ル (定理 10)。故 = (1) 7 $A^{\gamma} =$ 於ケル方程式ト考ヘレバ其ノ解ハ 0 ダケデアル。故 = $\delta > 0$ が十分小サケレバ $|e-1| < \delta$ ノ時 (3) 7 満足スル A^{γ} ノ点 X ハ 0 = 限ル。 $0 < |e-1| < \delta$ ノ時 (3) が E ノ点 X デ満足サレテ居ルトスル。 x 7 (2) = 依テ定義スル。 $X \in E^{\alpha}$ ナラバ $x \in A^{\alpha}$ デアル。

(2), (3) カラ

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right)X = x$$

7 得ルカラ $X \in$ 亦 A^{α} ノ点デアル。従ツテ $X \in E^{\alpha+1} = \{A^{\alpha}, M\}$ ノ点デアル。 β が直前ノ順序数ヲ持タズ、 $\alpha < \beta$ ノ時 $X \in E^{\alpha}$ ナラバ $X \in E^{\beta} = \prod_{\alpha < \beta} E^{\alpha} = \varepsilon$ 属スル、故 = $X \in E^{\gamma}$ トナル。 $X \in E^{\alpha}$ カラ $X \in A^{\alpha}$ 7 得ルノデアルカラ $X \in A^{\gamma}$ デアル、従テ $X = 0$ トナル。

以上

$$(4) \quad X - fF(X) = x$$

ノ解ヲ

$$(5) \quad x - G(x, e) = X$$

ト書ケバ $G(x, e)$ ノ ($e =$ 關スル) 特異点ハ (3) ノ固有値デア定理 11 = 依ツテ孤立シテ居ル、併シソレダケデアハ (定理

6ヲ考へ = 入レテ ϵ) (3)ノ固有値ガ $G(x, \theta)$ ノ極 = ナルコトハ証明サレナイ。

定理12. 「 $\theta = 1$ ヲ(3)ノ固有値トスル。 $\gamma < \omega$ ナラバ $G(x, \theta)$ ノ特異点 $\theta = 1$ ハ極デアアル」

コトハ証明出来ヌガ、ソノ逆ハ?

定理13. 「 $\gamma < \omega$ ナラバ E/A ハ M ト *homéomorphe* = ナル」ガ $\gamma \geq \omega$ ナラバドウナルデアラウカ?

附記. 後 = ナツテ長ガツイタノデアアルガ、前回ハ結論ヲ急ヤ遅ヤテ証明ノ途中デ重大ノ過失ヲ犯シテ居タ。從ツテ今回ノ結果ハ前回ノ定理ガ成立スル場合 = ハ同時 = 成立スルノデアアルガ、一般ノ線状 D 空間デ以上ノ定理ガ成立スルコトガ証明サレタコト = ハナレナイ。