

### 329. 多元環, *Ideal*, 最小公倍数, 最大公約数 III

中山 正 (改訂)

§1. 前稿, 特 = II. §3 = ツミイテニツ, *Maximalordnung*, *Summe*, *Durchschnitt* ヲ考察シテ次, 定理ヲ証明スル。

定理  $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}, \bar{\mathcal{O}}$  ヲ多元環  $\mathcal{Y}$  ノニツ, *Maximalordnung* トスル。ソノ時若シ  $\mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}_0 \cap \bar{\mathcal{O}}$  デアルナラバ  $\mathcal{O} = \bar{\mathcal{O}}$  デアル。

定理 同様 =  $\sigma_0 + \sigma = \sigma_0 + \bar{\sigma}$  ナラ  $\sigma = \bar{\sigma}$  デアル。

コゝ = 第二ノ主張ハ第一ノカラ直グ出ル (直接 = 云ハルガ)。ソレハ前稿 II. §2 デ述ベタ如ク  $\sigma_0 \wedge \sigma$  ハ  $\sigma_0 + \sigma$  ノ左及ビ右 *Ordnung* デアルカラ  $\sigma_0 + \sigma = \sigma_0 + \bar{\sigma}$  ナラ  $\sigma_0 \wedge \sigma = \sigma_0 \wedge \bar{\sigma}$  トナルカラデアアル。

証明ノ大要ヲ述バル。マハリ *im Kleinen* デ且ツ *normaleinfach* ノ場合 = マレバヨイ。

補助定理 1. アル  $\mathbb{P}$  進多元体  $D$  ノ整数元カラナル行列

$$\xi = \begin{pmatrix} \pi^{\rho_1} & e_{12} & \dots & e_{1r} \\ & \pi^{\rho_2} & \dots & e_{2r} \\ & & \dots & \\ 0 & & & \pi^{\rho_r} \end{pmatrix}; \quad 0 \leq \rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_r$$

= 於テ常 =  $\pi^{\rho_i} | e_{ik}$  ナリトスル ( $\pi$  ハ  $D$  ノ *Primideal* , *Primelement* )。然レバ  $D$  ノ整数元カラナル適當ナ行列  $\eta$  ヲトツテ

$$(1) \quad \eta^{-1} \begin{pmatrix} \pi^{\rho_1} & & & \\ & \pi^{\rho_2} & & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & & & \pi^{\rho_r} \end{pmatrix} \eta = \begin{pmatrix} \pi^{\rho_1} e'_{12} & \dots & e'_{1r} \\ & \pi^{\rho_2} & \dots & e'_{2r} \\ & & \dots & \\ 0 & & & \pi^{\rho_r} \end{pmatrix},$$

$$\text{且ツ } e'_{ik} \equiv e_{ik} \pmod{\pi^{\rho_k}}$$

トナルマツ = 出来ル。

(証明)

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & f_{12} & \dots & f_{1r} \\ & 1 & & f_{2r} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{トオケ、} \eta^{-1} \in \eta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & g_{12} & \dots & g_{1r} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

ナレ形 = ナル、然モ  $f$  が  $\text{ganz}$  ナラ  $g \in \mathbb{Z}$  ヲデアル、而シテ實際 = 書イテ見レバ  $\eta$  カルヤ  $\eta = g_{ik} (i < k)$ 、ハ  $f_{ik}$  及ビ  $l-j < k-i$  ナル如キ  $f_{jl}$  トノミ = ヲツテ決定カレル。

シカシテ  $\begin{bmatrix} \pi^{p_1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & & \pi^{p_r} \end{bmatrix}$  ヲ  $\eta$  デ  $\text{transform}$  スルバ (1) ノ右

辺ノ様ナ形 = ナルガ、コノ際  $0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_r$ 、 $\pi^{p_i} | e_{ik}$  ナル関係ヲツカヘバ  $e'_{ik} \equiv e_{ik} \pmod{\pi^{p_i}}$  トナル様 =  $f_{12}, f_{23}, \dots, f_{1r}$  ヲ順次 = キメテ行クコトが出来ルノデアル、實際書クト長クナルカテ省略スル。

補助定理 2.  $\mathcal{O}$  ヲ  $p$  進数体  $K$  ノ  $\text{Zentrum} = \mathbb{Z}$  ヲ單純環トシ、 $\mathcal{O}$  ノ一ツノ  $\text{Maximalordnung}$   $\sigma_0$  及ビソノアル  $\text{ganz}$  ナ左  $\text{Ideal}$   $\alpha$  が與ヘラレテキルトスル。然ラバ  $\mathcal{O}$  ヲ適當 = 多元体  $D$  ノ  $\text{Matrizenalgebra}$  トシテ、

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \sigma_0 \text{ ハ } D \text{ ノ } \text{ganz} \text{ ナ元ノ行列全体トナリ} \\ 2) \alpha \text{ ハ} \\ \begin{bmatrix} \pi^{p_1} & e_{12} & \dots & e_{1r} \\ & \pi^{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pi^{p_r} \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} \pi^{p_i} | e_{ik} \\ 0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r \end{array} \end{array} \right.$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{(勿論 } \gamma = \gamma \wedge \gamma^2 = (\gamma:K)/(D:K)) \\ \text{ナレ形ノ元ヲ生成サレル } \sigma_0 \text{ノ左 Ideal} = \text{ナレ。} \end{array} \right.$

様 = 表現スルコトが出来ル。

(証明) ソレ = ハ先ツ 1) ダケガ満足サレル様 = 表現シ、  
ソレカラ更 = 行、列ノ番號ノヨビ方ヲ適當 = カヘテ行ケバ

2) モ満足サレル様 = 出来ルコトガ容易 = 証明サレル。

コノ二ツノ補助定理ヲツカヘバ容易 = 証明サレルゴトク

補助定理3  $\sigma_0, \sigma$  ヲ  $\mathbb{F}$  進数体  $K$  ノ Zentrum =  $\epsilon$  ツ  
單純環  $\mathcal{A}$  , 任意, ニツ Maximalordnung トスル。  
シカラバ  $\mathcal{A}$  ヲ多元体  $D$  ノ Matrizenalgebra トシ  
テ

$\left\{ \begin{array}{l} 1) \sigma_0 \wedge D, \text{ ganz } + \text{元ノ行列全体, 即チ} \\ \sigma_0 = \sum_{i,k} \epsilon_{ik} \sigma_D, \\ 2) \sigma \wedge \text{適當} + \rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_r \text{ ヲトツテ} \\ \sigma = \sum_{i,k} \epsilon_{ik} \sigma_D \pi^{\rho_k - \rho_i} \\ \text{ナレ形} = \text{ナレ。} \end{array} \right.$

様 = 表現スルコトが出来ル。又ゴシ  $\epsilon_{ik}$  ハソノ際、Mat-  
rizeneinheiten,  $\sigma_D \wedge D$  , Maximalordnung  
トス。

更 = 他方 = 於テ

補助定理4  $\mathbb{F}$  進多元体  $D$  , Matrizenalgebra  
 $\mathcal{A} = D_r$  , ナレ Maximalordnung  $\sigma$  ガソノ  $r$  個, 對

角線上, *Matrizeneinheiten*  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{rr}$   
 を含んだキルナラハ適當 =  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$  をトツテ

$$\sigma = \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \pi^{\nu_k - \nu_i} \sigma_D$$

ナル形 = カケル。

(証明)  $\sigma \ni \varepsilon_{ii}$  ナルコトカラ  $\sigma$  ハ  $\sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \pi^{a_{ik}} \sigma_D$  ナル形

= ナリ、 $\sigma$  が *Maximalordnung* ナルコトカラ  $\sum a_{ik} = 0$   
 トナル。勿論  $a_{il} + a_{lk} \geq a_{ik}$  ナアルガ、コレト  $\sum a_{ik} = 0$   
 ナル関係カラ適當 =  $\nu_1, \dots, \nu_r$  をトツテ  $a_{ik} = \nu_k - \nu_i$   
 ナル形 = 出來ルコトガ証明セラレル。

補助定理 3, 4 カラ我々ノ主張ガ容易 = ミチビカレル。  
 $\sigma_0, \sigma, \bar{\sigma}, \sigma_0, \sigma =$  補助定理 3 を適用シテ、ソコノ條件ヲ  
 ミタス様 =  $\gamma$  を表現スレバ

$$\begin{aligned} \sigma_0 \cap \sigma &= \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \pi^{\max(0, \rho_k - \rho_i)} \sigma_D \\ &= \sum_{i < k} \varepsilon_{ik} \pi^{\rho_k - \rho_i} \sigma_D + \sum_{i \geq k} \varepsilon_{ik} \sigma_D \end{aligned}$$

トナル。シカシテ  $\sigma_0 \cap \sigma$  ハ  $\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{rr}$  をフクム  
 カラ  $\sigma_0 \cap \sigma = \sigma_0 \cap \bar{\sigma}$  ナラ  $\bar{\sigma}$  ハ 補助定理 4 ノ條件ヲミタ  
 シ、従ツテ

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sum \varepsilon_{ik} \pi^{\nu_k - \nu_i} \sigma_D, \\ \sigma_0 \cap \bar{\sigma} &= \sum \varepsilon_{ik} \pi^{\max(0, \nu_k - \nu_i)} \sigma_D \end{aligned}$$

トナル、ヨツテ

$$(2) \text{Max}(0, \nu_k - \nu_i) = \text{Max}(0, \rho_k - \rho_i);$$
$$i, k = 1, 2, \dots, r$$

トナリ、コレカラ容易 =  $\rho_k - \rho_i = \nu_k - \nu_i$  カスベテ、 $i, k$   
= 成立ツ、ヨツテ  $\sigma$  ト  $\bar{\sigma}$  ハ一致スル。

(結果が一寸意外デモアルノデ少シク不安デスが多分)  
間違ハナイツモリデス。

§2. 更 =

定理  $\sigma_0 \wedge \sigma \cong \sigma_0 \wedge \bar{\sigma}$  ナラ  $\sigma_0 + \sigma \cong \sigma_0 + \bar{\sigma}$  デ  
アル。

(証明) ソレハヤハリ上ノ補助定理3, 4ヲツカツテ上  
ノ証明ト全ク同様デアツテ (2) ノカハリ =

$$\text{Max}(0, \nu_k - \nu_i) \leq \text{Max}(0, \rho_k - \rho_i)$$

トナリ、シタガツテヤハリ  $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_r$  デ、且ツ  
 $k > i$  ナラバ  $\nu_k - \nu_i \leq \rho_k - \rho_i$  トナル。依ツテ

$\sigma_0 + \bar{\sigma} \cong \sigma_0 + \sigma$  ナルコトハ容易 = 証明セラレル。更 =  
逆 =

定理  $\sigma_0 + \sigma \cong \sigma_0 + \bar{\sigma}$  ナラ  $\sigma_0 \wedge \sigma \cong \sigma_0 \wedge \bar{\sigma}$  デアル  
モ成立スルガ、ソノ証明ハ次ノ稿 = 書カセテイタヅキタイ。  
然モ

定理  $\sigma_0 \wedge \sigma \cong \sigma_0 \wedge \bar{\sigma}$  (即チ  $\sigma_0 + \sigma \cong \sigma_0 + \bar{\sigma}$ ) ナラバ  $\sigma$   
ノ  $\sigma_0$  = 對スル *Distanzideal* ハ  $\bar{\sigma}$ ,  $\sigma_0$  = 對スル  $\nu$   
= ヨツテ割レル。

(証明) ソレハヤハリ  $V_k - V_i \leq \rho_k - \rho_i$  ナルコトカラ容易ニ証明セラレル。

云ヘカヘレバ *Durchschnitt* が小ニナルホド遠ク(?)ナルト云フ結果デアル。タビシエ、定理ノ逆が成立タナイコトハ容易ニワカル。