330. Mazzoni氏平均値ノ定理ニ就テノ一注意

高須鶴三郎（東北大）

P. Mazzoni, Rend. Palermo, 52 (1923) ニアル

$$(1)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(h)+\cdots\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}\left(x+\frac{1}{n+1}h\right)$$

$$+\frac{nh^{n+2}}{2(n+1).(n+2)!}f^{(n+2)}_{(x+\theta h)},\quad 0<\theta<1$$

ノ型ノ平均値ノ定理ハ R. Rothe ノ Math. Z. 9 (1921) ニ依リ $f^{(n+1)}(x)\neq 0$ ナルトキニノミ意義深イモノデアリマスが，$f^{(n+i)}(x)=0$, $(i=1,2,\cdots\cdots,n+p-1)$, $f^{(n+p)}(x)\neq 0$ ナル時ニ $\frac{1}{n+1}$ ノ代リニ L. Sokolowski, Tohoku M. J. 31 (1929), p. 182 ニ基キ $\sigma_n(p)=1:\sqrt[p]{\binom{n+p}{p}}$ ヲトッテ Mazzoni ノ真似ヲシテ (1) ノ拡張ヲ試ミ、$p=1$ ナルトキ (1) が出ル様ナモノヲ探シテモ微分ダケデハ困難がアッテ仲々出テ来ナカッタノヲ、中野秀五郎君ノ日本数物記事，17 (1935) ニアル平均値ノ定理即チ $(n+p+1)$ 回微分可能ニシテ $f^{(n+p+1)}(x)$ が $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n+p+1}, x$ ヲ含ム最小閉区間 $[x, x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n+p}]$ デ積分可能デ

$$(2)\quad (\xi_1-x_0)(\xi_2-x_1)\cdots\cdots(\xi_{n+p+1}-x_{n+p})$$

が

$$(3)\quad \xi_1\subset[x,x_0],\ \xi_2\subset[\xi_1,x_1],\cdots\cdots,\ \xi_{n+p+1}\subset[\xi_{n+p},x_{n+p}]$$

デ正負号ヲ変ヘナイ時ハ

$$(4)\quad f(x)=f(x_0)+f'(x_1)\int_{x_0}^{x}d\xi_1+f''(x_2)\int_{x_0}^{x}d\xi_1\int_{x_1}^{\xi_1}d\xi_2+\cdots\cdots$$
$$+f^{(n+p)}(x_{n+p})\int_{x_0}^{x}d\xi_1\int_{x_1}^{\xi_1}d\xi_2\cdots\cdots\int_{x_{n+p-1}}^{\xi_{n+p-1}}d\xi_{n+p}$$
$$+f^{(n+p+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}d\xi_1\int_{x_1}^{\xi_1}d\xi_2\cdots\cdots\int_{x_{n+p-1}}^{\xi_{n+p-1}}d\xi_{n+p}\int_{x_{n+p}}^{\xi_{n+p}}d\xi_{n+p+1}$$

ナル如キ ξ ガ $[x, x_0, x_1, \cdots\cdots, x_{n+p}]$ ニ存在スルト云フ定理ニ於テ

$$x /\!/ x+h,\ x_0=x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots=x_{n+p-1}=x,$$
$$x_n=x_{n+p}=\sigma_n(p)h,\quad f^{(n+1)}(x)=f^{(n+2)}(x)=\cdots=f^{(n+p-1)}(x)=0,$$

$f^{(n+p)}(x)\neq 0$ ト置クト (1) ノ拡張ガ出テ来ルト云フコトヲ外ノ結果ト共ニ数物記事ノ 1935 十二月号ニ報告シテ置キマシタ。其シテ (2) ガ (3) デ正負号ヲ変ヘナイコトハ容易ニ見ラレルトシテ省イテ置キマシタ。然シ後カラ其ノ容易ノ程度ガ省略スベキ程度デナイコトニ気附イテ後悔シテ居リマス。見カケ上 (2) ガ (3) デ正負号ヲ変ヘル様ニサヘ見エテ誤トシテ攻撃セラレル憂サヘアリマスカラ其ノ証明ヲ略説サセテ頂キマス、其レニハ p.490 ニ次ノ様ナ脚註ヲツケタライイト思ヒマス。

Dass das Produkt $(\xi_{n+1}-x_n)(\xi_{n+p+1}-x_{n+p})$ *bei den Veränderungen von* $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_{n+p+1}$ *in (4) ihr Vorgeichen durchaus nicht ändert,* ersieht man folgendermassen.

$$\int_x^{x+h} d\xi_1 \int_x^{\xi_1} d\xi_2 \cdots\cdots \int_x^{\xi_{n+p-1}} d\xi_{n+p} \int_x^{x+\sigma_n(p)h} d\xi_{n+p+1}$$

$$= \int_x^{x+h} d\xi_1 \int_x^{\xi_1} d\xi_2 \cdots\cdots \int_x^{\xi_{n+p-1}} d\xi_{n+p} \left[\sigma_n(p)h\right]$$

$$= \sigma_n(p)h \int_x^{x+h} d\xi_1 \int_x^{\xi_1} d\xi_2 \cdots\cdots \int_x^{\xi_{n+p-1}} d\xi_{n+p}$$

$$= \sigma_n(p)h \times \left\{ \text{der Koef. von } f^{(n+p)}_{(x_{n+p})} \right\}$$

$$= \sigma_n(p)h \left\{ h^{n+p} \frac{\sigma_n^p(p) - \sigma_n^p(p)}{n!\, p!} \right\} = 0.$$

Also ist

$$\int_x^{x+h} d\xi_1 \int_x^{\xi_1} d\xi_2 \cdots\cdots \int_x^{\xi_{n+p}} d\xi_{n+p+1} = \int_x^{x+h} d\xi_1 \int_x^{\xi_1} d\xi_2 \cdots\cdots \int_x^{\xi_{n+p-1}} d\xi_{n+p} \left[\int_{x+\sigma_n(p)h}^{\xi_{n+p}} d\xi_{n+p+1} \right.$$

$$\left. + \int_x^{x+\sigma_n(p)h} d\xi_{n+p+1} \right]$$

$$= \int_x^{x+h} d\xi_1 \int_x^{\xi_1} d\xi_2 \cdots\cdots \int_x^{\xi_{n+p-1}} d\xi_{n+p} \int_{x+\sigma_n(p)h}^{\xi_{n+p}} d\xi_{n+p+1},$$

so dass es ganz egal ist ob man x_{n+p} als $x+\sigma_n(p)h$ ansieht oder ob man x_{n+p} als x ansieht.

Entsprechen die Faktoren $(\xi_{n+p+1} - x_{n+p})$ und $(\xi_{n+1} - x_n) \equiv \xi_{n+1} - (x + \sigma_n(p)h)$

	>0	<0
zueinander, so sieht man x_{n+p} als	x	$x+\sigma_n(p)h$

an, so dass das Produkt $(\xi_{n+1}-x_n)(\xi_{n+p+1}-x_{n+p})$ durchaus positiv bleibt, In übrigen Fällen bleibt das ganze Produkt positiv.

正　誤

頁	行	誤	正
481	13	$[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n+p+1}]$	$[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n+p}]$
482	4, 23, 26	$[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n+p+1}]$	$[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n+p}]$
482	1	$\int_{x_0}^{x_1} d\xi_1 + \varphi''(x_2)\int_{x_0}^{\xi}$	$\int_{x_0}^{x} d\xi_1 + \varphi''(x_2)\int_{x_0}^{x}$
483	13	$\varphi^{(n)}(\xi)$	$\lim \varphi^{(n)}(\xi)$
484	2	f^{n-1}	$f^{(n-1)}$
〃	3	h_n	h^n
489	6	$[\bar{x}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots \bar{x}_{n+p+1}]$	$[\bar{x}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{n+p}]$
490	9	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt[p]{\quad}$
〃	13	σ_p^n	σ_n^p
〃	20	(4) sich	(4)
〃	21	$(\xi_{n+p}-x_n)$	$(\xi_{n+1}-x_n)$

(2) カ (3) デ正負号ヲ変ヘル様ニサヘ見ヘテ誤トシテ質問サレ攻撃サレル憂サヘアリマスカラ其ノ証明ノ方針ヲ略説サセテ頂キマス。