335. *Metrisation* ノ一問題

角　谷　靜　夫（阪大）

空間 R_1 が *metrisch* デアレバソノ任意ノ部分集合 R_2 ハコレヲ空間ト考ヘレバ *metrisch* デアル。R_2 ノ *Metrik* ρ_2 ヲ R_1 ノ *Metrik* ρ_1 ト同ジモノニ取レバヨイ。今 R_2 ノ *Metrik* ρ_2 が任意ニ（ρ_1 ト異ナルモノニ依ツテ）與ヘラレテヰルトキ ρ_2 ヲ R_2 全体ヘ *fortsetzen* スルコトが出來ルデアロウカ？　勿論 ρ_2 ハ R_2 ニ於イテ ρ_1 ト *äquivalent*[1] デアルモノトシ，ρ_2 ヲ R_2 全体ヘ *fortsetzen* シテ得ラレル ρ_2^* モ R_1 ニ於テ ρ_1 ト *äquivalent*

デアルモノヲ求メルモノトスル。

コノ問題ハ必ズシモ常ニ可能デハナイ。例ヘバ R_1 ヲ實數全体，R_2 ヲ $-1<x<+1$ ナル實數全体トシ

$$\rho_1(x,x')=|x-x'|,$$

$$\rho_2(x,x')=\left|\frac{x}{1-|x|}-\frac{x'}{1-|x'|}\right|$$

トオケバ ρ_2 ハ R_1 全体ヘ ρ_1 ト äquivalent ニナルヤウニ fortsetzen スルコトハ出來ナイ。コノ例ニ於イテハ ρ_2 ハ R_2 ニ於テ有界デナイコトが不能ノ原因デアッタが脚註1)ノ場合ハ ρ_2 ハ R_2 ニ於テ有界デアルがヤハリ ρ_2 ヲ R_1 全体ヘ ρ_1 ト äquivalent ニナルヤウニ fortsetzen スルコトハ出來ナイ。

然ラバ如何ナル場合ニ Fortsetzung が可能デアルカ?。コレニ對シテ次ノ定理が成立スル。

定理1. R_1 が metrisch, R_2 がソノ部分空間デ R_1 ニ於テ閉デ且ツ kompakt デアレバ任意ノ R_2 ノ Metrik ハ R_1 全体ヘ fortsetzen スルコトが出來ル。

---

1) 二ツノ Metrik が äquivalent デアルト云フノハソノ各々ニヨッテ定メラレル近傍系が topologisch äquivalent ナルコトデアル。例ヘバ Gauss 平面上ノ單位円周ヲ R_1, $\rho_1(z,z')=|z-z'|$ トシ，R_1 ヨリ $z=1$ ヲ取リ去ッタ殘リノ集合ヲ R_2, ソノ Metrik ヲ

$$\rho_2(e^{i\theta},e^{i\theta'})=|\theta-\theta'|$$

トスレバ ρ_1 ト ρ_2 トハ R_2 ニ於テ äquivalent デアル。

定理Ⅰハ例ヘバ R_1 ガ kompakt デ R_2 ガ R_1 デ開デテ居レバ成立スル。シカシ、コノ際更ニ次ノ一般ナ定理ガ成立スル。

定理Ⅱ　R_1 ガ metrisch, im kleinen kompakt デ，R_2 ガソノ部分空間デ R_1 ニ於テ開デテ居レバ任意ノ R_2 ノ Metrik ハ R_1 全体ヘ fortsetzen スルコトガ出来ル。

定理Ⅰノ証明：　R_1 ノ Metrik ガ ρ_1, R_2 ノ Metrik ガ ρ_2 ニヨッテ與ヘラレタトセヨ。先ヅ適當ニ R_1 ノ Metrik ヲツケカヘテ新シイ Metrik ρ_1^* ヲ作レバ R_2 ニ屬スル任意ノ x, y ニ對シテ $\rho_1^*(x,y) \geqq \rho_2(x,y)$ トナルコトヲ証明スル.

コノ爲ニハ次ノ條件ヲ滿足スル函數 $h^*(t)$ ヲ作ッテ $\rho_1^*(x,y) = h^*(\rho_1(x,y))$ ト置ケバヨイ。

1° $h^*(t)$ ハ $t \geqq 0$ ニテ定義サレテ $h^*(0)=0$, $t>0$ ナルトキ $h^*(t)>0$

2° $\lim\limits_{t\to 0} h^*(t)=0$

3° $h^*(t)$ ハ $t \downarrow 0$ ナルトキ單調非増加,

4° $t_1, t_2, t_3 > 0$,　$t_1+t_2 \geqq t_3$ ナラバ

$$h^*(t_1)+h^*(t_2) \geqq h^*(t_3)$$

5° $h^*(t)$ ハ $t \geqq 0$ ニテ t ノ連續函數

6° $x, y \in R_2$ ナルトキ $h^*(\rho_1(x,y)) \geqq \rho_2(x,y)$

R_2 ハ kompakt デ且ツ R_1 ニ於テ開デテヰルカラ（即

テ in sich kompakt デアルカラ) $x, y \in R_2$ ナルトキノ $\rho_2(x, y)$ ノ上限 M ハ有限デアル。故ニ $x, y \in R_2$, $\rho_1(x, y)=t$ ナルアラユル x, y ノ組ニ對スル $\rho_2(x, y)$ ノ上限ヲ $h(t)$ ニテ表ハセバ $h(t)$ ハ $0 \leqq t < \delta_1(R_2)$[2] ナルスベテノ t ニ對シテ定義サレテ $h(0)=0$, $0<t<\delta_1(R_2)$ ナルトキ $0<h(t) \leqq M$ デアル。$t \geqq \delta_1(R_2)$ ナルトキハ $h(t)=M$ ト置ク。

$\lim\limits_{t \to 0} h(t)=0$ ナルコトヲ示サウ。若シ $\lim\limits_{t \to 0} h(t)=0$ デナケレバ $h(t) \geqq 0$ デアルカラ $\overline{\lim\limits_{t \to 0}} h(t)>0$ トナル。即チ

$t_n \downarrow 0$ ナル t_n ニ對シテ $h(t_n)>2\delta$ ナル $\{t_n\}$, $\delta>0$ が存在スル。

故ニ $h(t)$ ノ定義ヨリ

$$x_n, y_n \in R_2, \quad \rho_1(x_n, y_n)=t_n, \quad \rho_2(x_n, y_n)>\delta$$

ナル x_n, y_n $(n=1, 2, \text{------})$ が存在スル。R_2 ハ in sich kompakt デアルカラ x_n ノ適當ナ Teilfolge x_{n_ν} ヲ取レバ $x_{n_\nu} \to x_0$, $x_0 \in R_2$ トナル。$\rho_1(x_{n_\nu}, y_{n_\nu})=t_{n_\nu} \to 0$ デアルカラ $y_{n_\nu} \to x_0$ デアル。コレハ $\rho_2(x_{n_\nu}, y_{n_\nu})>\delta$ ナル假定ニ矛盾スル。

$\lim h(t)=0$ デアルカラ

$$\bar{h}(t)=\underset{0 \leqq s \leqq t}{\mathrm{O.G.}}\, h(s) \text{ ....} (1)$$

---

2) $\delta_1(R_2)$ ハ $x, y \in R_2$ ナルスベテノ x, y ニ關スル $\rho_1(x, y)$ ノ上限ヲ表ハス。

トオケバ $\lim_{t\to 0}\overline{h}(t)=0$。デ且ツ $t\downarrow 0$ ナルトキ $\overline{h}(t)$ ハ単調減少デアル。

次ニ

$$h^*(t)=t\cdot\left(\underset{s\geqq t}{O.G.}\frac{\overline{h}(s)}{s}\right)\text{-------------------------}(2)$$

トオク。コノ $h^*(t)$ ガ先ノ條件 1°—6° ヲ満足スルコトヲ示サウ。$\overline{h}(t)$, $h^*(t)$ ノ定義 (1), (2) ヨリ直チニ

$$h^*(t)\geqq\overline{h}(t)\geqq h(t)$$

ヲ得ルカラ 1°, 6° ハ明カデアル。

<u>2° ノ証明</u>　$\lim_{t\to 0}\overline{h}(t)=0$ デアルカラ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $\delta>0$ ガ定マツテ $0<t<\delta$ ナルトキ $\overline{h}(t)<\varepsilon$.

スルト　$t<\dfrac{\delta\cdot\varepsilon}{M}$ ナルトキ

$$h^*(t)=t\cdot\left(\underset{s\geqq t}{O.G.}\frac{\overline{h}(S)}{S}\right)$$

$$=t\cdot Max.\left\{\left(\underset{s\geqq\delta}{O.G.}\frac{\overline{h}(s)}{s}\right),\left(\underset{\delta>s\geqq t}{O.G.}\frac{\overline{h}(t)}{t}\right)\right\}$$

$$\leqq t\cdot Max.\left\{\frac{M}{\delta},\frac{\varepsilon}{t}\right\}=Max.\left\{\frac{tM}{\delta},\varepsilon\right\}=\varepsilon$$

<u>3° ノ証明</u>　$t_1>t_2$ トスレバ

$$\underset{s\geqq t_1}{O.G.}\frac{\overline{h}(s)}{s}=\frac{h^*(t_1)}{t_1}<\frac{h^*(t_1)}{t_2},$$

$$\underset{t_1\geqq s\geqq t_2}{O.G.}\frac{\overline{h}(s)}{s}\leqq\frac{\overline{h}(t_1)}{t_2}\leqq\frac{h^*(t_1)}{t_2}$$

デアルカラ

$$h^*(t_2)=t_2\cdot \mathrm{Max}\left\{\left(\underset{s\geqq t_1}{\mathrm{O.G.}}\frac{\overline{h}(s)}{s}\right),\left(\underset{t_1\geqq s\geqq t_2}{\mathrm{O.G.}}\frac{\overline{h}(s)}{s}\right)\right\}\leqq h^*(t_1)$$

<u>4°ノ証明</u>　　$h^*(t)$ ノ定義ヨリ

$$h^*(t_1)=t_1\cdot\left(\underset{s\geqq t_1}{\mathrm{O.G.}}\frac{\overline{h}(s)}{s}\right)\geqq t_1\left(\underset{s\geqq t_1+t_2}{\mathrm{O.G.}}\frac{\overline{h}(s)}{s}\right)=\frac{t_1}{t_1+t_2}\cdot h^*(t_1+t_2)$$

同様ニ

$$h^*(t_2)\geqq\frac{t_2}{t_1+t_2}h^*(t_1+t_2)$$

故ニ

$$h^*(t_1)+h^*(t_2)\geqq h^*(t_1+t_2)$$

$$\geqq h^*(t_3).\quad (t_1+t_2\geqq t_3 \text{ 及ビ } 3^\circ \text{ ニヨル})$$

5° ハ 2°, 3°, 4° ヨリ容易ニ得ラレル。

$\rho_1^*=h^*(\rho_1)$ ヲ此ノ如ク定義シテカラ定理Ⅰノ証明ノ本筋ニ入ル。　R_2 ヲ R_1 内ノ集合ト考ヘレバ

$$R_1=\mathrm{I}(R_2)+\mathrm{F}(R_2)+\mathrm{E}(R_2),\qquad R_2=\mathrm{I}(R_2)+\mathrm{F}(R_2)$$

トワケルコトガ出来ル。ココニ $\mathrm{I}(R_2)$ ハ R_2 ノ内点ノ集合, $\mathrm{F}(R_2)$ ハ境界, $\mathrm{E}(R_2)$ ハ外点ノ集合デアル。第二ノ等式ハ R_2 ガ R_1 ニテ閉デテキルカラ成立スル。

x, y ヲ R_1 ノ任意ノ二点トスルトキ $\rho_2^*(x,y)$ ヲ

$$\rho_2^*(x,y)=\mathrm{U.G.}\sum_{i=0}^{n-1}\rho(z_i,z_{i+1})\text{ ---------------- }(3)$$

ニ依ッテ定義スル。ココニ $z_0=x$, $z_n=y$ トオキ $z_1, z_2, \cdots$

$\cdots\cdots, z_{n-1}$ ハ R_1 内ノ任意ノ点デアリ且ツ

$$z_i,\ z_{i+1} \in R_2 \text{ ナルトキ } \rho(z_i, z_{i+1}) = \rho_2(z_i, z_{i+1})$$

コレ以外ノ場合、即チ z_i 又ハ $z_{i+1} \in R_2 - R_1 = E(R_2)$ ナルトキ

$$\rho(z_i, z_{i+1}) = \rho_1^*(z_i, z_{i+1})$$

ト定メル。$U.G.$ ハカヽル $\{z_1, z_2, \cdots\cdots, z_{n-1}\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ 全体ニ對スル下限ヲ表ハスモノトスル。

次ニ此ノ如ク定義サレタ $\rho_2^*(x, y)$ ガ所要ノ $\rho_2(x, y)$ ノ Fortsetzung デアルコトヲ示スノデアルガ、ソノ前ニ $\rho_2^*(x, y)$ ノ定義ハ次ノ如ク簡單ニ述ベラレルコトヲ証明シヨウ。[3]

(i) $x, y \in R_2$ ナルトキハ $\rho_2^*(x, y) = \rho_2(x, y)$

(ii) $x \in R_2,\ y \in R_1 - R_2$ ナルトキハ.

$$\rho_2^*(x, y) = \rho_2^*(y, x) = \underset{z \in R_2}{U.G.}\{\rho_2(x, z) + \rho_1^*(z, y)\}$$

(iii) $x, y \in R_2 - R_1$ ナルトキハ

$$\rho_1^*(x, y) = Min.\Big[\underset{z_1, z_2 \in R_2}{U.G.}\{\rho_1^*(x, z_1) + \rho_2(z_1, z_2) + \rho_1^*(z_2, y)\},\ \rho_1^*(x, y)\Big]$$

(i) ノ証明　コノ爲ニハ $x, y \in R_2$ ナルトキ任意ノ $z_1, z_2, \cdots\cdots,$ $z_{n-1} \in R_1$ ニ對シテ

$$\rho_2(x, y) \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(z_i, z_{i+1}) \quad z_0 = x,\ z_n = y \cdots\cdots\cdots (4)$$

3) $\rho_2^*(x, y)$ ノ定義ヲ始メニ複雑ナ形デ定義シタノハ $\rho_2^*(x, y)$ ニ關スル距離ノ三角関係ノ成立ノ証明ヲ簡單ニスルタメデアル。

ナルコトヲ証明スレバヨイ。$z_i\ (i=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$ ガスベテ R_2 ニ属シテ居レバ $\rho(z_i, z_{i+1}) = \rho_2(z_i, z_{i+1})$ $(i=0,1,\cdots\cdots,n-1)$ デアルカラ (4) ハ $\rho_2(x,y)$ ニ関スル三角不等式ヨリ明カデアル。$z_i\ (i=1,2,\cdots\cdots,n-1)$ ノウチニ R_1-R_2 ニ属スルモノガアレバ $z_i\ (i=0,1,2,\cdots\cdots,n)$ カラコレラヲ除イタモノヲ順ニ $z_{i_0}=z_0=x,\ z_{i_1},\ z_{i_2},\cdots\cdots,\ z_{i_{k-1}},\ z_{i_k}=z_n=y$ トオク。

今 $i_{j+1} > i_j+1$ デアレバ

$$\sum_{i=i_j}^{i=i_{j+1}-1} \rho(z_i, z_{i+1}) = \sum_{i=i_j}^{i=i_{j+1}-1} \rho_1^*(z_i, z_{i+1})$$

$$= \sum_{i=i_j}^{i=i_{j+1}-1} h^*(\rho_1(z_i, z_{i+1}))$$

$$\geqq h^*\Big(\sum_{i=i_j}^{i=i_{j+1}-1} \rho_1(z_i, z_{i+1})\Big) \quad (4° \text{ニヨル})$$

$$\geqq h^*(\rho_1(z_{i_j}, z_{i_{j+1}})) \quad (\rho_1 \text{ノ三角不等式及ビ } 3° \text{ニヨル})$$

$$\geqq \rho_2(z_{i_j}, z_{i_{j+1}}) \quad (6° \text{ニヨル})$$

故ニ

$$\sum_{i=0}^{n-1} \rho(z_i, z_{i+1}) \geqq \sum_{j=0}^{j=k-1} \rho_2(z_{i_j}, z_{i_{j+1}})$$

$$\geqq \rho_2(z_{i_0}, z_{i_k}) \equiv \rho_2(x,y) \quad (\rho_2 \text{ノ三角不等式ニヨル})$$

(ii), (iii) モ同様ニスレバ証明デキルカラ証明ハ省略スル。

(i) ニヨッテ $x, y \in R_2$ ナルトキハ $\rho_2^*(x,y) = \rho_2(x,y)$ ナルコトガワカッタカラ $\rho_2^*(x,y)$ ガ所要ノモノデアルコ

トヲ示スタメニハ

(I) $\rho_2^*(x, y)$ ガ距離ノ三公準ヲ満スコト。

(II) R_1 デ考ヘテ $\rho_2^*(x, y)$ ト $\rho_1^*(x, y)$ (又ハ $\rho_1(x,y)$) ガ *topologisch äquivalent* ナルコト。

ヲ証明スレバヨイ。

(I) ハ三角不等式ハ定義 (3) ヨリ明カデアルシ、其他ノ二ツノ公準ハ (i), (ii), (iii) ヨリ明カデアル。

<u>(II) ノ証明</u>　$x_0 \in I(R_2)$ ナル点ノ適当ナ近傍ニテハ (i) ヨリ $\rho_2^* = \rho_2$ ニテ ρ_2 ハ ρ_1 ト *äquivalent* デアル。$x_0 \in E(R_2)$ ナル点ノ適当ナル近傍ニテハ (ii), (iii) ヨリ $\rho_2^* = \rho_1^*$ デアル。

故ニ $x_0 \in F(R_2)$ ナルトキ

(a) $\rho_1^*(x_0, y_n) \to 0$ ナラバ $\rho_2^*(x_0, y_n) \to 0$

(b) $\rho_2^*(x_0, y_n) \to 0$ ナラバ $\rho_1^*(x_0, y_n) \to 0$

ナルコトヲ示セバヨイ。然ルニ ρ_2^* ノ定義ヨリ $\rho_2^* \leqq \rho_2$ or ρ_1^* デアツテ $\rho_2 \leqq \rho_1^*$ デアルカラ $\rho_2^* \leqq \rho_1^*$. (a) ハコレヨリ明カデアル。(b) ハ $y_n \in E(R_2)$ ナルトキノミ証明スレバヨイ。

$y_n \in E(R_2)$ ナラバ (ii) ヨリ $Z_n \in R_2$ ガ存在シテ

$$\rho_2(x_0, Z_n) + \rho_1^*(Z_n, y_n) < 2\rho_2^*(x_0, y_n) \to 0$$

故ニ　$\rho_2(x_0, Z_n) \to 0$,　$\rho_1^*(Z_n, y_n) \to 0$.

R_2 ニテ ρ_2 ト ρ_1 シタガツテ ρ_1^* ガ *äquivalent* デアルカラ最初ノ式ヨリ

$$\rho_1^*(x_0, z_n) \longrightarrow 0$$

後ノ式ト組合ハシテ

$$\rho_1^*(x_0, y_n) \longrightarrow 0$$

ヲ得ル。(定理Iノ証明終リ)