336. 行列方程式ニ就テ

淺野啓三（阪大）

本紙第74号（326）ニ於テ，行列方程式 $e^x = A$ ニツイテ論ジタガ，今コレヲ一般ニシテ，

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots$$

ヲ與ヘラレタル Potenzreihe，A ヲ複素數体ニ於ケル n 次ノ Matrix トシテ，行列方程式

$$f(X) = A$$

ヲ考察スル。

B ヲ任意ノ Matrix トシ，ソノ Normalform ヲ

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_m \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{array}{c} \rho_r \\ \overbrace{\begin{pmatrix} \omega_r & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \omega_r \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$B_r = \omega_r E_r + F_r$$

$$E_r = \begin{array}{c} \rho_r \\ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}} \end{array}, \quad F_r = \begin{array}{c} \rho_r \\ \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}, \quad F_r^{\rho_r} = 0$$

トスル。

$$P^{-1}f(B)P = f(P^{-1}BP) = \begin{pmatrix} f(B_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(B_m) \end{pmatrix}$$

$$f(B_r)=f(\omega_r E_r+F_r)=f(\omega_r)E_r+f'(\omega_r)F_r+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{f^{(\rho_r-1)}(\omega_r)}{(\rho_r-1)!}F_r^{\rho_r-1}=\begin{pmatrix} f(\omega_r) & & & 0 \\ f'(\omega_r) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{f^{(\rho_r-1)}(\omega_r)}{(\rho_r-1)!} & \cdots & f'(\omega_r) & f(\omega_r) \end{pmatrix}$$

勿論 $f(B)$ ハ converge スルモノトスル。（上ノ関係式カラ直チニ分ルコトデアルガ，$f(B)$ ガ converge スルタメ必要且ツ充分ナ條件ハ $f(z), f'(z), \cdots\cdots, f^{(N)}(z)$ $(N=\mathrm{Max}(\rho_r-1))$ ガ converge スルコトデアル．B ノ Eigenwert ガ $f(z)$ ノ收斂円内ニアレバ $f(B)$ ハ確カニ收斂スル）$f'(\omega_r)\neq 0$ ナラバ第Ⅱ4号ノ326ニ於ケル如ク $xE_r-f(B_r)$ ノ Elementalteiler ハ $(x-f(\omega_r))^{\rho_r}$, $1, \cdots\cdots, 1$ トナル、從ッテ次ノ定理ガ成立スル。

定理：　$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ ヲ與ヘラレタル Potenzreihe トシ，Matrix B ノ Eigenwert ω_r ハスベテ $f(z)$ ノ收斂円内ニ在リ，$f'(\omega_r)\neq 0$ トスル．$xE-B$ ノ Elementalteiler ヲ $(x-\omega_r)^{\rho_r}$ $(r=1,2,\cdots\cdots,m)$ トスレバ，$xE-f(B)$ ノ Elementalteiler ハ $(x-f(\omega_r))^{\rho_r}$ $(r=1,2,\cdots\cdots,m)$ デアル。

從ッテ之レカラ次ノ定理ヲ得ル。

定理： *Matrix* A ノ *Eigenwert* λ_r ニ對シテ

$$f(w_r)=\lambda_r, \quad f'(w_r)\neq 0$$

トナル w_r ガ存在スレバ $f(X)=A$ ハ解ヲ有スル。

證明： A ノ *Elementalteiler* ヲ $(x-\lambda_r)^{\rho_r}$ ($r=1, 2, \cdots\cdots, m$) トシ，定理ニ於ケル如キ w_r ヲトッテ $(x-w_r)^{\rho_r}$ ヲ *Elementalteiler* トスル *Matrix*

$$X_0=\begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_n \end{pmatrix}, \quad B_r=\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} w_r & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & w_r \end{matrix}}^{\rho_r} \end{pmatrix}$$

ヲ作レバ $f(X_0)$ ノ *Elementalteiler* ガ A ト一致スル．故ニ $P^{-1}f(X_0)P=f(P^{-1}X_0P)=A$ トナル P ガ存在スル．即チ $f(X)=A$ ハ解ヲ有スル。

特ニ $f(x)=e^x=\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ トスレバ，$f'(x)\neq 0$ デアルカラ A ノ *Eigenwert* λ_r ガ 0 デナケレバ，即チ *Det.* $A\neq 0$ ナラバ $e^X=A$ ガ解ヲ有スル。

又 $f(x)=x^n$ トスレバ *Det.* $A\neq 0$，即チ $\lambda_r\neq 0$ ナルトキ $w_r^n=\lambda_r$，$f'(w_r)=nw_r^{n-1}\neq 0$ トナル w_r ガアルカラ $X^n=A$ ハ解ヲ有スル。