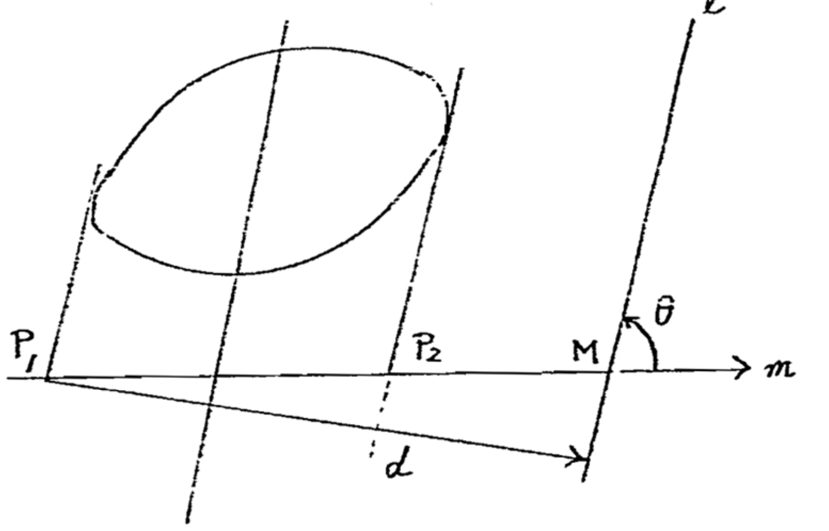
340. 確率論ノ一問題ニ就イテ

須田 信濃夫（東京）

確率論ニ於イテ有名ナ Bertrand ノ不定問題ノ一ツヲ一般化シテ次ノ問題ヲ考ヘル。

「一ツノ卵形Aガ與ヘラレタルトキ，Aヲ過ル直線ヲ無心ニ引イテ、ソレガA内ノ一ツノ卵形Bヲ過ル確率ヲ求ム」

卵形Aノ平面内ニ任意ノ直線 l ヲトリ、正ノ方向ノ定メラレテアル一定直線 m トノナス角ヲ θ トス。$(0 \leqq \theta < \pi)$ l ニ平行ナ卵形ノ二ツノ切線ガ m ト交ハル点ヲ P_1, P_2 トスル。



但シ Vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ ガ m ノ方向ニ関シテ、正ノ向キヲ持ツ様ニシテオク。Mヲ l ト m トノ交点トシテ

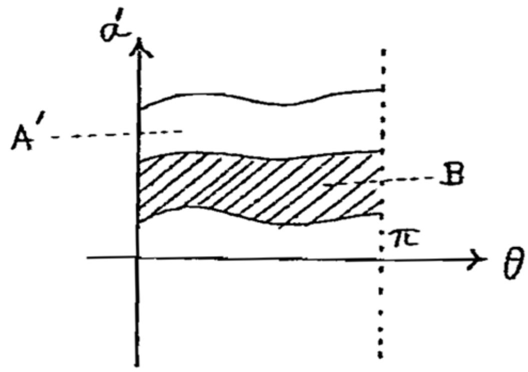
$$d = \pm \sin\theta \cdot P_1M.$$

トオク、$\overrightarrow{PM}$ ノ方向ガ正ナラ＋，負ナラ－．

任意ノ直線ハ θ ト α ヲ一意ニキメ、逆ニソレラノ値デ一意ニ定マル。

θ, α ヲ一ツノ補助平面ノ直交座標ト考ヘルト、卵形ノ平面上ノ直線ト補助平面上ノ $(0 \leqq \theta < \pi)$ ナル領域ノ点トハ一對一ニ對應スル。

今、問題ニナルノハ、Aヲ通ル直線ノミデアル。補助平面上デハ、カヽル直線ニ對應スル点ハ領域 A' ヲ作ル。Bニ對應シテ領域 B' ガ出來ル。



A', B' ハ夫々函數 $f(\theta), f_1(\theta), f_2(\theta)$ ヲ適當ニトレバ

$$0 \leqq \theta < \pi \quad 0 \leqq \alpha \leqq f(\theta);$$
$$0 \leqq \theta < \pi \quad f_1(\theta) \leqq \alpha \leqq f_2(\theta)$$

デ表ハスコトガ出來ル。

$f(\theta)$ 及ビ $f_2(\theta) - f_1(\theta)$ ハ卵形A, Bノ一定方向ニ對スル幅ニ他ナラナイ。

直線ガAヲ通ルヤウニ引カレタルトキ、任意ノA内ノ卵形Bヲ過ル確率ハ、Bニ對應スル補助平面ノ領域 B' ノ面積ニ比例スルトイフ假定ヲ設ケル。

直線ガAヲ通ルヤウニ引カレタルトキ、Aヲ通ル確率ハ1デアル。

從ツテ直線ガBヲ通ル確率ヲ P_B トセバ

$$P_B = 1 \times \frac{B' \text{ノ面積}}{A' \text{ノ面積}}$$

式ハ

$$P_B = \frac{\int_0^{\pi}(f_2(\theta) - f_1(\theta))d\theta}{\int_0^{\pi} f(\theta)d\theta}$$

分子，分母ニ現ハレタ積分ハ卵形ニ従属スル量ヲ表ハス。即チ、ソレハ方向θニ對スル卵形ノ幅ヲθニ付イテ 0カラπ迄積分シタモノデアル。

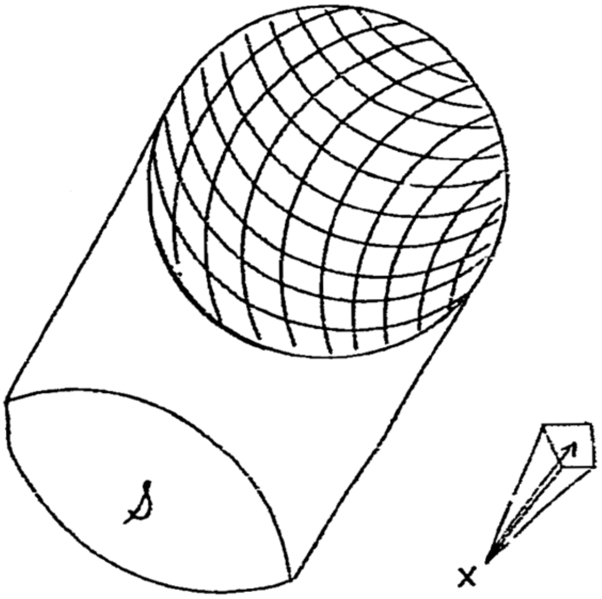
此量ハ実際、卵形ノ周ニ等シクナル。

一方ニ於イテ此ノ量ハ、偶然的ナ直線ガソノ中デ変動スル直線集合ノ測度ト考ヘルコトガ出来ル。此ノ意味デ之レヲ卵形ノ直線面積ト名付ケル。スルト、次ノヤウニ云フコトガ出来ル。

一ツノ卵形Aヲ過ギル直線ヲ引イタトキ、其ノ直線ガA内ノ卵形Bヲ過ギル確率ハ、アル假定ノ下デB,Aノ直線面積ノ比ニ等シイ。

最初ニ云ッタ Bertrand ノ問題ハ、Aガ半径rノ円デBガ半径$\frac{r}{2}$ノ同心円デアル場合デアル。我々ノ解法ハ渡辺氏確率論所載ノ本問題ノ三ツノ解法ノ第一ノモノト同ジ考ヘ方ニ従ッテアル。（但シ、問題ノモトノ形ハ直線ガBヲ過ギルトイフ代リニ、弦ガAノ内接正三角形ノ一辺ヨリ大デアルトイフ條件ヲ使ッテアル）

2. 卵形ニ於ケル直線面積ノ考ヘ方ヲ空間圖形ニ拡ゲテ、卵体ノ直線体積，平面体積ヲ考ヘルコトガ出来ル。



前者ハ、任意ノ方向ニ平行ニ卵体ヲ射影シテ得タル cylinder ノ直角断面積ヲ S デ表ハスト

$$\int s\, d\Omega$$

デ定義出來ル。$d\Omega$ ハ球面角ノ element デアル。

後者ハ，l ヲ任意ノ方向ニ對應スル卵体ノ幅トスレバ

$$\int l\, d\Omega$$

ニヨッテ定義出來ル。

直線体積ノ場合ニハ次ノ簡単ナ関係ガアル。

$$\boxed{\nabla = \pi S}$$

但シ S ハ卵体ノ表面積，∇ ハ直線体積

之レ等ノ量ハ次ノ様ナ確率ノ問題ニ應用出來ル。

「或ル卵体ヲ過ル直線（平面）ヲ無心ニ引キ、其ノ直線（平面）ガソノ卵体内ニアル小ナル卵体ヲ過ル確率如何」