342. 或ル不等式ニ就テ

野村武衛(東京高師)

Journal London Math. Soc. 10 (1935) 242 ニ H. C. Pocklington ガ次ノ二ツノ不等式ヲ証明シテ

キル。

コレカラ出テ來ル文字 a, k, p, x_i, y_i 等ハ悉ク正數ニシテ且ツ

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \text{------} \geqq x_n, \quad y_1 \geqq y_2 \geqq \text{------} \geqq y_n$$

トスル。

〔定理1〕

$$(1) \quad \sum_1^n x_r y_r \geqq a^p \qquad \sum_1^n x_r \leqq ka$$

ナレバ，$s \geqq k$ ナル正整數 s ニ對シテ少クトモ

$$(2) \quad X_s = \sum_1^s x_r \geqq a$$

$$(3) \quad Y_s = \sum_1^s y_r \geqq a^{p-1}$$

ノ何レカ一方ガ成立スル。

〔定理2〕 $p \geqq 2$ ナルトキ

$$(4) \quad \sum_1^n x_r^p \geqq a^p \qquad \sum_1^n x_r \leqq ka$$

ナレバ，$s \geqq k$ ナル正整數 s ニ對シテハ

$$(5) \quad \sum_1^s x_r \geqq a$$

Pocklington ノ方法ヲ殆ンドソノマヽデ之レ等ノ定理ヲ少シ擴張スルコトガ出來ル。定理1ノ a^{p-1} ノ代リニ b ヲ用ヒテ

〔定理3〕

$$(1') \quad \sum_1^n x_r y_r \geqq ab \qquad \sum_1^n x_r \leqq ka$$

ナレバ，$s \geqq k$ナル正整数sニ對シテ少クトモ

$$(2') \quad X_s = \sum_1^s x_r \geqq a$$

$$(3') \quad Y_s = \sum_1^s y_r \geqq b$$

ノ何レカ一方ガ成立スル。

（證明）

$$ab \leqq x_1 y_1 + \cdots\cdots + x_n y_n \leqq y_1 X_s + y_s (X_n - X_s)$$
$$\leqq y_1 X_s + y_s (ka - X_s)$$

$$\therefore \quad ab \leqq (y_1 - y_s) X_s + kay_s$$

$$\therefore \quad (y_1 - y_s)(X_s - a) \geqq ab - kay_s - a(y_1 - y_s)$$
$$= a\{b - y_1 - (k-1) y_s\}$$

$$\therefore \quad (y_1 - y_s)(X_s - a) \geqq a\{b - y_1 - (s-1) y_s\}$$
$$\geqq a\{b - y_1 - y_2 \cdots\cdots y_s\} = a(b - Y_s)$$

コレデ$(2)'$，$(3)'$ノ何レモ成立セヌトスルト負数ガ正數ヨリ大トナリ不合理ニナル。故ニ$(2)'$，$(3)'$ノ少クトモ一方ハ成立シナケレバナラヌ。

〔定理4〕　$x > 0$ナルトキ$\varphi(x)$　$\dfrac{\varphi(x)}{x}$ハ共ニ單調增加デ，$\varphi(x)$ハ正デ連續トスル。

$$(4)' \quad \sum_1^n x_r \varphi(x_r) \geqq a\varphi(a), \quad \sum_1^n x_r \leqq ka$$

ナレバ，$s \geqq k$ナル正整數sニ對シテハ

$$(5)' \quad \sum_1^s x_r \geqq a$$

（証明）　$\varphi(x_1) \geqq \varphi(x_2) \geqq \cdots\cdots \geqq \varphi(x_n)$デアルカラ定

理3ニヨッテ

$$\sum_{1}^{s} x_\nu \geqq a \quad 又ハ \quad \sum_{1}^{s} \varphi(x_\nu) \geqq \varphi(a)$$

ノ何レカ一方ガ成立スルト云フコトニナル。Cooper ノ不等式ニヨレバ

$$\varphi^{-1}\{\varphi(x_1)+\cdots\cdots+\varphi(x_s)\} \leqq x_1+\cdots\cdots+x_s$$

トナルカラ $\varphi(a) \leqq \sum_{1}^{s} \varphi(x_\nu)$ ナレバ

$$\varphi^{-1}\{\varphi(a)\} = a \leqq x_1+\cdots\cdots+x_s$$

故ニ何レニシテモ

$$a \leqq \sum_{1}^{s} x_\nu \qquad \text{(証明終)}$$

コノ定理デ $\varphi(x)=x^p$, $p \geqq 1$ トスレバ定理2ガ得ラレル。