346. Kompakt ナ連續群ガ Separabel ナルタメノ條件

小松醇郎，角谷靜夫（阪大）

kompakt ナ topologisch kontinuierliche Gruppe G ヲ研究スルニ際シテ G ガ Separabel (Hausdorff ノ意味デ) ナルコトハ屢々假定サレテヰル。次ニ G ガ如何ナル條件ノ下デ Separabel ニナルカヲ調ベテ見ヨウ.

定理 I　kompakt ナ topologische kontinuierliche Gruppe G ガ erstes Abzählbarkeitsaxiom ヲ滿足スレバ zweites Abzählbarkeitsaxiom ヲモ滿足スル.

證明：　G ノ Einheitselement e ノ近傍系ヲ

$$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots\cdots \supset U_n \supset \cdots\cdots \ni e \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

トセヨ。(G ハ e ニ於テ erstes Abzählbarkeitsaxiom ヲ滿足シテヰルカラ、コレハ可附番個デ間ニアフ)。

$$U_{n_1} = U_1 \quad (\text{即チ } n_1 = 1)$$

トオキ、一般ニ $U_{n_{k-1}}$ ガ定マッタトキ U_n $(n > n_{k-1})$ ノウチニテ始メテ

$$U_n^2 \subset U_{n_{k-1}}$$

トナルモノヲ U_{n_k} トオク. ($k = 2, 3, \cdots\cdots$)

$$U_{n_1} \supset U_{n_2} \supset \cdots\cdots \supset U_{n_k} \supset \cdots\cdots \ni e \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ハ (1) ト äquivalent ナ e ノ近傍系デアル。次ニ

$$\mathfrak{V}_k=\mathfrak{U}_{n_k}^{-1}\times\mathfrak{U}_{n_k}\qquad k=1,2,\cdots\cdots$$ 1)

トオケバ明カニ

$$\mathfrak{V}_k^{-1}=\mathfrak{V}_k,\quad \mathfrak{V}_k^{2}\subset\mathfrak{V}_{k-1}$$

デアリ

$$\mathfrak{V}_1\supset\mathfrak{V}_2\supset\cdots\cdots\supset\mathfrak{V}_k\supset\cdots\cdots\ni e \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ハ又 (1), (2) ト äquivalent ナ e ノ近傍系デアル。

先ヅコノ各々ノ $\mathfrak{V}_k$ ニ對シテ有限個ノ点ヨリナル集合

$$E_k=\{a_1^k,a_2^k,\cdots\cdots,a_{m_k}^k\}$$

ヲ作ツテ

$$G=\mathfrak{V}_k\cdot E_k\equiv\sum_{i=1}^{m_k}\mathfrak{V}_k\cdot a_i^k \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$ 2)

ガ成立スルヤウニスルコトガ出來ルコトヲ示サウ。コノタメニ

$$a_1^k=e$$

トオキ，一般ニ $a_i^k\ (i=1,2,\cdots\cdots,m-1)$ ガ定マツタトキ若シ

$$G-\sum_{i=1}^{m-1}\mathfrak{V}_k\cdot a_i^k\neq 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

---

1) $A\times B$ ハ A,B ノ Durchschnitt ヲ表ハス。

2) $\mathfrak{V}\cdot a$ ハ a ノ左側ニ $\mathfrak{V}$ ノ各 Element ヲ乗ジテ得ラレル Element 全体ノ集合．

$\mathfrak{V}\cdot E$ ハ $b\in\mathfrak{V},\ a\in E$ ナルアラユル b,a ニ對スル ba ノ集合。

デアレバコレ＝属スル任意ノ一ツノ Element ヲ取ッテ a_m^k トオク。(5) ノ左辺ガ空集合デアレバ $E_k=\{a_1^k, a_2^k, \cdots\cdots, a_{m-1}^k\}$ トオケバ (4) ガ成立スルノデアルカラ、此ノ様ナ方法デ a_m^k $(m=1,2,\cdots\cdots)$ ガ無限ニ多ク求メラレルト云フ假定ガ矛盾ヲ含ムコトヲ示セバヨイ。

若シ a_m^k $(m=1,2,\cdots\cdots)$ ガ無限ニ存在スレバ G ハ kompakt デアルカラ $\{a_m^k\}$ ハ少クトモ一ツ集積点ヲモツ。コレヲ a_0^k トセヨ。

$V_{k+1}\cdot a_0^k$ ハ a_0^k ノ近傍デアルカラコノ内部ニハ $\{a_m^k\}$ ノ点ガ少クトモ二ツ存在スル。コレヲ a_p^k, a_q^k $(p<q)$ トセヨ。

$$a_p^k \in V_{k+1}\cdot a_0^k, \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

$$a_q^k \in V_{k+1}\cdot a_0^k \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

$V_{k+1}^{-1}=V_{k+1}$ ナルコトヲ用フレバ (6) ヨリ

$$a_0^k \in V_{k+1}\cdot a_p^k$$

コレト (7) トヨリ

$$a_q^k \in V_{k+1}^2\cdot a_p^k \subset V_k\cdot a_p^k$$

コレハ a_q^k ガ $\sum_{i=1}^{q-1} V_k\cdot a_i^k$ ニ属シナイト云フ假定ニ反スル。

此ノ如クシテ E_k $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ガ存在スルコトガ分ッタ。

次ニ我々ハ

$$W_{k,i}=V_k\cdot a_i^k;\ i=1,2,\cdots,m_k;\ k=1,2,\cdots\cdots (8)$$

トオキ、コレガ G ノ Basis トナルコトヲ証明シヨウ。即チ G ノ各点 x ニ對シテ、x ヲ内点トシテ含ム如キスベテノ $\mathfrak{W}$ ヲ x ノ近傍系ト考ヘルトキハ、コレガ始メノ近傍系（各点 x ノ近傍系ハ $U_n \cdot x$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ニヨツテ與ヘラレタト考ヘルコトガ出來ル！）ト äquivalent ナルコトヲ証明シヨウ。

$\mathfrak{W}$ ハスベテ offen デアルカラ Äquivalenz ヲ証明スルタメニハ任意ニ G ノ点 x トソノ近傍 $U_{n_0} \cdot x$ トガ與ヘラレタトキ

$$x \in \mathfrak{W} \subset U_{n_0} \cdot x \quad \text{------------------------------}(9)$$

ヲ満足スル $\mathfrak{W}$ ガ存在スルコトヲ示セバ十分デアル。

$n_k \geqq n_0$ ナル n_k ヲ取リ $V_{k+1} \cdot a_i^{k+1}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,m_{k+1})$ ヲ考ヘレバ

$$G = \sum_{i=1}^{m_{k+1}} V_{k+1} \cdot a_i^{k+1}$$

デアルカラ少クトモ一ツノ $i = i(x, k+1)$ ニ對シテ

$$x \in V_{k+1} \cdot a_i^{k+1} \quad \text{------------------------------}(10)$$

$V_{k+1}^{-1} = V_{k+1}$ ナルコトヨリ

$$a_i^{k+1} \in V_{k+1} \cdot x \quad \text{------------------------------}(11)$$

ヨツテ (10), (11) ヨリ

$$x \in V_{k+1} \cdot a_i^{k+1} \subset V_{k+1}^2 \cdot x \subset V_k \cdot x \subset U_{n_k} x \subset U_{n_0} \cdot x$$

故ニ $W = W_{k+1,i} = V_{k+1} \cdot a_i^{k+1}$ ト取レバ(9)ガ成立スル。コノ W ハタシカニ(8)ノ形デ(8)ノ形ノ W ハ明カニ可附番個デアルカラ定理Iノ証明ハ完結スル。

定理II. kompakt + topologische kontinuierliche Gruppe G ガ任意ニ小サイ zyklische Untergruppe ヲ含マナイナラバ G ハ erste Abzählbarkeitsaxiom (従ッテ定理Iニヨリ Zweites Abzählbarkeitsaxiom) ヲ満足スル。

注意: 定理ノ始メノ部分ハ G ガ im kleinen kompakt デアルトキニモ成立スル。

G ガ任意ニ小サイ zyklische Gruppe ヲ含ムト云フノハ Einheitselement ノ任意ノ近傍 U ニ對シテ $a \neq e$ ナル Element a ガ定マッテ

$$a^n \in U, \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$$

トナルコトデアル。

コノ定理ヨリ、次ノコトガワカル。

系. 若シ G ガ kompakt デアッテ separabel デナイナラバ Einheit e ノ任意ノ近傍 U ニ對シテ少クトモ一ツ $a(a \neq e)$ ガ定マリ

$$a^n \in U \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$$

トナル。

実際 kompakt デ separabel デナイ topologische

Gruppe ハ存在シテ、ソレハ任意ニ小サイ Zyklische Gruppe ヲ持ッテヰル。[3] シカシ kompakt, separabel デアッテ、コノ性質ヲ持ッテヰル空間モ存在スル。[4]

故ニ定理 II ノ條件ハ kompakte Gruppe ガ separabel デアルタメニ十分デハアルガ必ズシモ必要デハナイ。

定理 II ノ證明： 假定ニヨリ Einheitselement e ノ適當ナ近傍 U_0 ヲトレバ U_0 ニ属スル任意ノ $a \, (a \neq e)$ ニ對シテ $n = n(a)$ ガ定マッテ（n ハ正又ハ負ノ整数）

$$a^n \in U_0$$

トナル。 Einheitselement ノ近傍 U_k（$k = 1, 2, \cdots\cdots$）ヲ

$$U_k^{-1} = U_k, \quad U_k^2 \subset U_{k-1} \quad \cdots\cdots (12)$$

ナル如ク取ル。スルト明カニ

$$\overline{U_k} \subset U_{k-1} \quad \cdots\cdots (13)$$

[5] デアル。カクシテ得ラレタ

$$U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots\cdots \supset U_k \supset \cdots\cdots \ni e \quad \cdots\cdots (14)$$

---

3) Tychonoff (M. A. 102), Alexander (Annals of Math.   ) 等ニヨッテ考ヘラレタ空間ハソノ一例。コレラハ bikompakt デモアル。

4) Pontrjagin (Annals of Math. 35) ガ考ヘタ character group ハソノ一例。

5) コノコトヨリ topologische kontinuierliche Gruppe ガ常ニ regulär デアルコトガワカル。

ガ e ノ近傍系ナルコトヲ証明シヨウ。$\mathfrak{U}_k$ ハ何レモ offen デアルカラ、コノタメニハ Einheit ノ任意ノ近傍 $\mathfrak{V}$ ニ對シテ十分大キク $k=k(\mathfrak{V})$ ヲトレバ

$$\mathfrak{U}_k \subset \mathfrak{V} \quad \cdots\cdots (15)$$

トナルコトヲ示セバヨイ。若シ (15) ガ如何ナル k ニ對シテモ成立シナイナラバ

$$a_k \in \mathfrak{U}_k, \quad a_k \overline{\in} \mathfrak{V} \quad \cdots\cdots (16)$$

ナル $\{a_k\}$ ($k=1, 2, 3, \cdots\cdots$) ガ存在スル。$\{a_k\}$ ノ集積点ノ一ツヲ a_0 トスレバ (14), (16) ヨリ

$$a_0 \in \overline{\mathfrak{U}}_k \quad (k=0, 1, 2, \cdots) \quad \cdots\cdots (17)$$

$$a_0 \overline{\in} \mathfrak{V} \quad \cdots\cdots (18)$$

(18) ヨリ $a_0 \neq e$ ヲ得ル。又 (17), (13) ヨリ

$$a_0 \in \mathfrak{U}_{k-1}$$

デアルカラ (12) ヨリ

$$a_0^n \in \mathfrak{U}_0 \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots, \pm 2^{k-1}$$

k ハ任意デアルカラ、コレハ $\mathfrak{U}_0$ ニ對スル假定ニ矛盾スル。[6)]

---

6) $P = \prod_{k=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{U}}_k$ トオケバ P ハ閉集合デ $P \subset \prod_{k=1}^{\infty} \mathfrak{U}_{k-1} \subset \prod_{k=1}^{\infty} \mathfrak{U}_k \subset P$ ヨリ $P = \prod_{k=1}^{\infty} \mathfrak{U}_k$ トナル。コレヨリ $P^2 = P$, $P^{-1} = P$ ナルコトハ容易ニ示サレル。

即チ P ハ G ノ abgeschlossene Untergruppe デ $a_0 \in P$, $a_0 \neq e$ ヨリ P ガ trivial ナ Untergruppe デナイコトガワカル。

P.S. J. von Neumann ノ論文 (on complete topological spaces) ヲ見マシタラ定理Ⅰト同様ノコトヲ linear space デヤツテアリマシタ。

更ニ J. von Neumann ノ考ヘカタニヨレバ次ノ定理ガ成立スル。

定理Ⅲ. kompakt ナ topologische kontinuierliche Gruppe G ガ erstes Abzählbarkeitsaxiom (従ッテ zweites abzählbarkeits axiom) ヲ満足スルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ G ノ Einheit e ノ可附番個ノ近傍 (コレハ必ズシモ e ノ近傍系デアル必要ハナイ！) U_n ($n=1,2,\cdots\cdots$) ガ存在シテ

$$\prod_{n=1}^{\infty} U_n = e \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

トナルコトデアル。

証明: 必要ナコトハ明カデアルカラ十分ナコトヲ証明スル。

Einheit ノ近傍 V_n ($n=1,2,\cdots\cdots$) ヲ

$$V_n^2 \subset U_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

ナル如クトリ

$$\left.\begin{array}{l} W_1 = V_1,\quad W_2 = V_1 \times V_2, \cdots\cdots \\ W_n = V_1 \times V_2 \times \cdots\cdots \times V_n, \cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots (21)$$

トオク。

W_n ($n=1,2,\cdots\cdots$) ガ Einheit e ノ近傍系デア

ルコトヲ證明シヨウ。各々ノ W_n ハ offen デアルカラ、コノタメニハ任意ノ開集合 U:

$$e \in U$$

ニ對シテ $n=n(U)$ ヲ十分大キクトレバ

$$e \in W_n \subset U \qquad \text{(22)}$$

トナルコトヲ示セバヨイ。實際モシコレガ成立シナイナラバ

$$a_n \in W_n, \quad a_n \notin U \qquad \text{(23)}$$

ナル $\{a_n\}$ $(n=1, 2, \ldots\ldots)$ ガ存在スル。$\{a_n\}$ ノ集積點ノ一ツヲ a_0 トスレバ (23) ヨリ

$$a_0 \in \overline{W_n} \qquad \text{(24)}$$

$$a_0 \notin U \qquad \text{(25)}$$

シカルニ (21), (20) ヨリ

$$\overline{W_n} \subset \overline{V_n} \subset U_n$$

デアルカラ (24) ハ

$$a_0 \in U_n \qquad n=1, 2, \ldots\ldots$$

トナリ (19) ト組合ハセレバ

$$a_0 = e$$

トナル。然ルニ之レハ (25) ニ矛盾スル。ヨツテ (22) ガアル $n=n(U)$ ニ對シテ成立シナケレバナラナイ。