354. Komponentengruppe ニ就テ

小 松 醇 郎（阪大）

Hurewicz ノ Homotopiegruppe ノ擴張デアル所

ノ群 G^n ヲ定義スル. Raum ノ一ツノ Komponent ヲ一ツノ元トスルガ故ニ Komponentengruppe ト稱スル。

X: kompakt, metrisch, lokal zusammenziehbar, zusammenhängend. Urbildbereich $\{M_i^n\}$ トシテ n 次元 Sphere S^n 及ビ n 個ノ circle ノ Topologisches Produkt M_1^n 及ビソノ i 個ノ Vereinigung デ生ズル M_i^n ヲトル. Vereinigung トハ両方カラ充分小サナ單体ヲ取リ去リ生ズル Rand S^{n-1} ヲ互ニ Identifizieren スル。

ソノ abzählbar unendlich ノ M_i^n ハ各々ノ間ニ Grad 1 ノ stetige Abbildung ガ存在ス. M_i^n, M_j^n デ $i>j$ ナラバソノ abb. 一ツ φ_{ji} ヲ決メテオク. $\varphi_{ji}(M_i^n)=M_j^n$. φ ハ尚次ノ條件ヲ充スヤウニ選ンデ置ク。

$$\varphi_{ji}(M_i^n)=M_j^n,\quad \varphi_{kj}(M_j^n)=M_k^n$$

ナラバ

$$\varphi_{ki}(M_i^n)=\varphi_{kj}\varphi_{ji}(M_i^n)$$

Abbildungsraum $X^{M^n}(y_0)$ ヲ次ノ如ク求メル。

1° M_i^n ノ X ヘノ stetige Abbildung $f(M_i^n)$ ヲ一点トスル. 但シ常ニ必ズ $x_{i0}\in M_i^n$, $f(x_{i0})=y_0$ ナルモノノミヲトル。

2° $f_1(M_1^n)$ ト $f_2(M_1^n)$ トノ距離ハ

$$\overline{\lim_{x \in M_1^n}}\, \rho\{f_1(x), f_2(x)\} = \rho(f_1, f_2)$$

3° M_i^n ト M_j^n $(i \neq j)$ トノ *stetige Abbildung* デ *punkt weise* =

$$f_1(M_i^n) = g_1 \varphi_{ji}(M_i^n)$$

トナルトキ f_1 ト g_1 トハ等シイ点ヲ表ハス。

4° M_i^n ノ *Orientierung erhaltend* ナ *topologische Abbildung* T ガ存在シテ *punktweise* =

$$f_1(M_i^n) = f_2 T(M_i^n)$$

ナルトキ f_1 ト f_2 トハ等シイ点ヲ表ハス。

以上ノ條件ヲ充ス *Abbildungsraum* ニ就テハ先ヅ

a). *Metrischer Raum.*

3° ノ條件モ矛盾ヲ来タサズ、何トナレバ

$$\left.\begin{aligned} f_1(M_i^n) &= f_2 \varphi_{ji}(M_i^n) \\ g_1(M_i^n) &= g_2 \varphi_{ji}(M_i^n) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (1)$$

トスレバ $\rho(f_1, g_1) = \rho(f_2, g_2)$ (2° ノ意味デ) デナクテハナラナイ、ソレハ

M_i^n, M_j^n *kompakt, abgeschlossen* デアルカラ、

アル $x \in M_i^n$ デ

$$\rho(f_1, g_1) = \rho(f_1(x), g_1(x)).$$

アル $y \in M_j^n$ デ $\varphi_{ji}(x) = y$ ナル y ガ少クモ一点存在ス。(1) ハ *punktweise* デアッタカラ

$$\rho(f_1(x), g_1(x)) = \rho(f_2(y), g_2(y))$$

$$\therefore \quad \rho(f_2, g_2) \geqq \rho(f_1, g_1)$$

逆ニ又 $\rho(f_2, g_2) = \rho(f_2(z), g_2(z))$ ナル z ガ存在シ φ_{ji} デ z ノ Urbild u 少クモ一ツ存在ス。

$$\therefore \quad \rho(f_1(u), g_1(u)) = \rho(f_2, g_2)$$

$$\therefore \quad \rho(f_1, g_1) \geqq \rho(f_2, g_2)$$

4° ノ條件モ同様ニ矛盾ヲ生ゼズ。

b) 群 $\mathfrak{G}^n$.

ソノタメニハ空間ノ点ノ結合ヲ定メル、任意ノ二点 $f_1(M_i^n)$, $f_2(M_j^n)$ ニ對シテハ $f_3(M_i^n + M_j^n)$ ヲ對應サセル、f_3 ハ M_i^n デハ f_1 ト M_j^n ノ部デハ f_2 ト一致シ Vereinigung スル S^{n-1} ハ y_0 ニ移ル Abbildung トスル。 $f_1 f_2 = f_3$ ト表ハス。

此ノタメニハ

$$f_1(M_i^n) = g_1 \varphi_{ki}(M_i^n)$$

$$f_2(M_j^n) = g_2 \varphi_{lj}(M_j^n)$$

ナラバ $f_1 f_2 (M_i^n + M_j^n) = g_1 g_2 \varphi\mathrm{T}(M_i^n + M_j^n)$ ヲ充ス如キ topologische Abbildung ガ存在シナクテハナラナイ.

ソノタメニハ φ_{ji} ナル Abbildung ヲ次ノモノニトレバ良イ、先ヅ

$$\varphi_{12}(M_2 = M_1 + M_1) = M_1$$

ハ一ツノ $M_1 \rightarrow x_{10}$, 他方ノ M_1 ノ部ハ Bild トシテノ M_1 ニ

topologisch ニ移ルモノ、$\varphi_{i-1,i}$ モ同様ニ define スル。

$$M_i = \overbrace{M_1 + \cdots\cdots + M_1}^{i}$$

ノ Vereinigung ハ各 M_1 ノ部ハ S_k^{n-1} ニヨリ他方ト分タレ、斯様ナ i 個ノ S_i^{n-1} ハ皆、唯一ツノ共通ノ S^{n-2} ニヨリ二分サレ、隣レル S_i^{n-1}, S_{i-1}^{n-1} ハ一ツノ $(n-1)$ 次元 Zelle ヲ共有スル様ニトル。

然ラバ φ_{ji} ハ一点 x_{j0} ニ移ル M_1 ノ $i-j$ 個ノ部分ハ皆 "stark zusammenhängend" ナルヤウニトル。

スルト $\varphi(M_i + M_j) = M_k + M_l$ ハ

$i+j-k-l$ 個ノ M_1 ノ部一点ニ移ル、殘リノ $k+l$ 個ノ M_1 ノ内 stark Zusammenhängend ナ k 個ノ部ハ M_k ニ、l 個ノ部ハ M_l ニ topologisch ニ abbilden サレル、是ハ實際ニ

$$f_1 f_2 = g_1 g_2 \varphi$$

ナル條件ヲ充タス。

群 G^n ハ各 Komponent ニ一ツノ元ヲ對應サセソノ結合ハ f_1 ノゾクスル Komponent A, f_2 ノゾクスル Komponent B トスレバ $AB = C$, C ハ $f_1 f_2 = f_3$ ノゾクスル Komponent.

トスル。

明＝$f(M_i^n)=y_0$ ナル f ノゾクスル Komponent ハ單位元，$f_1(M_j^n)$ ヲ任意ニトレバ punktweise ＝

$$ff_1=f_3(M_i^n+M_j^n)=f_1\varphi(M_i^n+M_j^n)$$

$$\text{但シ}\quad \varphi(M_i^n+M_j^n)=M_j^n.$$

デアルカラ $ff_1=f_1$．即チ此ノ空間ノ点ノ結合トシテハ f ガ單位元ノ役目ヲ果スガ点ノ結合ニ関シテハ逆元ノ存在ガ成立シナイ．Komponentengruppe ガ成立スルノハ逆元ガ存在スルカラデアル。

即チ M_i^n ノ Orientierung umkehrende topologische Abbildung ヲ T^{-1} トスレバ

任意ノ $f_1(M_i^n)$ ガゾクスル Komponent ノ元 X ニ對シ X^{-1} ハ $f_1T^{-1}(M_i^n)$ ガゾクスル Komponent ヲ對應サセル．此ノタメニハ $f_3=f_1\cdot f_1T^{-1}(M_i^n+M_i^n)$ ガ單位元ノ Komponent ニゾクスル点ヲ表ハスコトヲ示セバ宜シ。

Vereinigungssphäre S^{n-1} ノ両側ノ T_1^n ハ互ヒニ逆向キニ移ル、コレヲ $f_3(T_1^n)-f_3(S^{n-1}\cdot T_1^n)$ ナル Bild ニ stetig ニ deform スルヲ得、$f_3(T_1^n+T_1^n)$ ノ一種ノ Ausfegeverfahren！

是ヲ続ケレバ $f_3(M_i^n+M_i^n)$ ハ $(n-1)$ 次元 Zyklus ニツノ Bild $f_3(Z_i^{n-1}+Z_i^{n-1})$ ニ移ル、之レヲ $f_3'(M_i^n+M_i^n)$ トスレバ適當ナ T ヲトレバ $f_3'T$ ハ $Z_i^{n-1}+Z_i^{n-1}$ ハ逆向キノ Abbilden トナル、T ハ S^{n-1} ニ関シ rotation um den Winkel $180°$.

f_3'，$f_3'T$．デアルカラ又前ト同様ナ *proceso* デ次元ヲ又下ゲテ $f_3(z_i^{n-2}+z_i^{n-2})$ ＝ *stetig* ＝ *deform* サレル。之レヲ続ケレバ結局 $f_3(z_i'+z_i')$ ナル *Bild* ＝ナル、之レハ一次元 *fundamentalgruppe* ノ場合＝帰シ結局 f_3 ハ単位元ヲ表ハス *Komponent* ノ点デアツタ。

——以上——

此ノ群ハ一次元ハ *Fundamentalgruppe* ニ一致スル、又 $X^{S^n}(y_0) \subset X^{\{M_\nu^n\}}(y_0)$ デアルカラ *Hurewicz* ノ n 次元 *Homotopiegruppe* ハコノ部分群デアル。

G^n ハ一般＝ *abelsch* デハナイ、例容易。