359. 函數方程式ニ就イテ, VII

福原満洲雄(北大)

§3. 前回ノ記号ヲソノマヽ使フコトニスル、即チ

(1) $\Phi(X) \equiv X - F(X) = 0$

ノ解 X ノ集合ヲ M,

(2) $\Phi(X) \equiv X - F(X) = x$

ガ解ヲ持ツ x ノ集合ヲ N, モット一般ニ

(3) $\Phi^n(X) \equiv X - F_n(X) = 0$

(4) $\Phi^n(X) \equiv X - F_n(X) = x$

ニ関シテ同ジヤウニ M_n, N_n ヲ定義スル、空間 E ノ点 Z ハ M_μ ノ点 X ト N_μ ノ点 Y ノ和トシテ表ハサレル：$Z = X + Y$ (定理14)、ソコデ

$$\bar{F}(Z)=F(Y), \qquad \bar{\Phi}(Z)=Z-\bar{F}(Z)$$

$$\bar{\bar{F}}(Z)=F(X), \qquad \bar{\bar{\Phi}}(Z)=Z-\bar{\bar{F}}(Z)$$

ニ依テ $\bar{F}(Z)$, $\bar{\bar{F}}(Z)$ ヲ定義スレバ証明スル迄モナク

定理16〔10〕「$\bar{F}(Z)$, $\bar{\bar{F}}(Z)$ ハ完全連続ナ一次函数デ $F(Z)=\bar{F}(Z)+\bar{\bar{F}}(Z)$, $\bar{F}(\bar{\bar{F}}(Z))=\bar{\bar{F}}(\bar{F}(Z))=0$; M_μ ノ点 X デハ $\bar{F}(X)=0$, $\bar{\bar{F}}(X)=F(X)$; N_μ ノ点 Y デハ $\bar{F}(Y)=F(Y)$, $\bar{\bar{F}}(Y)=0$ デアル。」

計算ヲ見ヤスクスルタメ F, Φ, $\bar{F}$ 等ヲ空間 E ノ点ニ施ス一次変換ヲ表ハス記号ト考ヘ, E デ $E(x)=x$ ナル変換ヲ表ハス（E ガ空間ヲ表ハス文字ト同ジデマヅイガ混同ノ恐レハナカラウト思フ）、一般ニ A, B ガ二ツノ一次変換ナルトキ $A+B$ デ $A(X)+B(X)$ ナル変換ヲ, AB デ $A(B(X))$ ナル変換ヲ表ハス。

$$\bar{\Phi}\bar{\bar{\Phi}}=(E-\bar{F})(E-\bar{\bar{F}})=E-\bar{F}-\bar{\bar{F}}+\bar{F}\bar{\bar{F}}=E-F=\Phi$$

同ジヤウニ $\bar{\bar{\Phi}}\bar{\Phi}=\Phi$ ヲ得ル。

定理17〔11〕「$\Phi^n(X)=x$ ハ常ニ解ヲ持ツ、$\bar{\bar{\Phi}}^n(X)=0$ ノ解ト $\Phi^n(X)=0$ ノ解トハ一致スル、$\bar{\bar{\Phi}}^n(X)=x$ ト $\Phi^n(X)=x$ トハ同時ニ解ヲ持ツカ又ハ同時ニ解ヲ持タナイ」

N_μ デ $\bar{\Phi}=\Phi$ デアルカラ $\bar{\Phi}(N_\mu)=\Phi(N_\mu)=N_\mu$. 又 M_μ デハ $\bar{\Phi}(X)=X$ 従ツテ $\bar{\Phi}(M_\mu)=M_\mu$. 故ニ

$$\bar{\Phi}(E)=\bar{\Phi}(M_\mu)+\bar{\Phi}(N_\mu)=M_\mu+N_\mu=E.$$

従ツテ $\bar{\Phi}^n(E)=E$、コレハ $\bar{\Phi}^n(X)=x$ ガ常ニ解ヲ持ツコ

トヲ示ス、残ッタ部分ノ証明モ大シタ困難ハナイト思フカラ省略スル。

§4. 前回(VI)ニ挙ゲタ定理ノ簡単ナ結果トシテ

$$(5)\qquad \Phi_\lambda(X) \equiv X - \lambda F(X) = 0$$

ノ固有値、即チソレガ0デナイ解ヲ持ツヤウナλノ値ガ孤立シテヰルコト〔12〕ガ得ラレル。λヲ含ム方程式ニ関スル定理ハ後デ纏メテ述ベル予定デアルカラ定理トシテハ後デ挙ゲルガ、ココデ証明ヲ述ベテ置ク方ガ分リガ早イト思フ。
簡単ノタメ $\lambda=1$ ヲ固有値トスル、$\lambda\neq 1$ ノトキ(5)ヲ満足スル解 X ヲ取リ(2)ニ依テ x ヲ定義スル。(2),(5)カラ

$$X=(\lambda-1)^{-1}\lambda x$$

ヲ得ル。$x\in N$ デアルカラ $X\in N$ トナル。一般ニ $X\in N_n$ ナラバ $x\in N_{n+1}$ デアルカラ $X\in N_{n+1}$ トナル。故ニ $\lambda\neq 1$ ノトキ(5)ヲ満足スル X ハ N_μ ノ点デナケレバナラナイ。
所ガ $\Phi(N_\mu)=N_\mu$. 従ッテ $F(N_\mu)\subseteqq N_\mu$ デアルカラ(5)ヲ空間 N_μ ニ於ケル方程式ト考ヘルコトガ出来ル。ソノトキ $\lambda=1$ ハ固有値デナイ、固有値ノ集合ガ閉ヂテヰルコトハ直グニ分ルカラ正ノ数 δ ヲ十分ニ小サク取レバ $|\lambda-1|<\delta$ ナルトキ(5)ヲ満足スル N_μ ノ点ハ0ニ限ル。

〔13〕ハ $\bar{\Phi}_\lambda \equiv X-\lambda\bar{F}(X)=0$ ノ固有値ニ関スルモノデアル。〔10〕,〔11〕,〔12〕,〔13〕カラ(5)ノ解ヲ $X=x-\lambda G(x,\lambda)$ ト書イタトキ $G(x,\lambda)$ ガλノ有理型函数トナルコトガ証明サレルコトハ Schauder ガ Über lineare, vollstetige

Funktionaloperationen (*Studia Math.*, II, 1930) ノ脚註(18)デ述ベテ居ル. コレ等ノ定理ノ別証明モ後デ述ベル積リデアル。

尚序デアルカラ $F(X)$ ガ完全連続デナクテモ $F^n(X)$ ガ完全連続トナルヤウナ正ノ整数 n ガ取レルナラバ同様ノ結論ヲ得ルコトヲ注意シテ置ク。

§5. *Riesz* ノ定理デ未ダ残ッテヰルノハ〔4〕ダケデアルガ、ソレヨリ次ニ述ベル定理ノ方ガ詳シイ。

$x_0 \in N$ トスレバ $\Phi(X) = x_0$ ハ解ヲ持ツ. ソノ一ツヲ x_0 トスレバ $\Phi(X - X_0) = 0$ デアルカラ $X - X_0 \in M$ 即チ $X \in M(X_0)$ デアル.

逆ニ $M(X_0)$ ニ属スル X ハ $\Phi(X) = x_0$ ヲ満足スル、故ニ N ノ点 x ニ商空間 E/M ノ点 $M(X) = X^*$ ガ一對一ニ對應スル、ソレヲ

$$\Phi^*(x) \equiv x^* - G^*(x) = X^*$$

ト書ク (簡單ノタメ $M(x)$ ノ代リニ x^* ト書イタ)

定理18. 「$G^*(x)$ ハ N デ定義サレタ完全連続ナ一次函数デアル」

此ノ証明ノ峠ハ N ニ含マレル有界ナ集合ノ $G^*(x)$ ニヨル像ガ緊ッテヰルトイフ所ニアルト思フカラ、ソノ部分ダケヲ述ベヨウ、N ニ属スル有界ナ点列 $\{x_j\}$ ヲ取ッタトキ先ヅ $\{G^*(x_j)\}$ ガ有界トナルコトヲ証明スル. $\{G^*(x_j)\}$ ノ代リニ

$$X_j^* = x_j^* - G^*(x_j)$$

ガ有界デアルコトヲ証明シテモ同ジデアル．若シソレガ有界デナケレバ適當ナ部分列ヲ取ルコトニ依リ $\rho_j = \|X_j^*\| \to \infty$ ト假定シテヨイ。M ガ有限ナ次元ヲ持ツカラ $\|X_j\| = \rho_j$ トシテヨイ。$X_j = \rho_j Y_j$ ト置ケバ $\Phi(X_j) = x_j$ デアルカラ

$$\Phi(Y_j) = Y_j - F(Y_j) = \rho_j^{-1} x_j, \quad \|Y_j\| = \|Y_j^*\| = 1$$

ヲ得ル．故ニ適當ナ部分列ヲ取ルコトニヨリ $F(Y_j) \to Y$ ト假定スルコトガ出來ル．$\rho_j^{-1} x_j \to 0$ デアルカラ $Y_j \to Y$、従ッテ $\Phi(Y) = Y - F(Y) = 0$ トナリ

$$Y \in M, \quad Z_j = X_j - \rho_j Y \in M(X_j)$$

ヲ得ル．$Y_j = \rho_j^{-1} X_j \to Y$ デアルカラ j ガ十分ニ大キイ時 $\|Y_j - Y\| < \frac{1}{2}$ 従ッテ $\|Z_j\| < \frac{1}{2}\rho_j$ トナリ矛盾デアル、故ニ X_j ハ有界デナケレバナラナイ、従ッテ $\{F(X_j)\}$ カラ收斂ナ部分列ヲ取出スコトガ出來ル、ソレヲ $F(X_{j_k}) \to Y$ トスレバ，$F(X_j) = X_j - x_j$ デアルカラ $X_{j_k} - x_{j_k} \to Y$、従ッテ $X_{j_k}^* - x_{j_k}^* \to Y^*$ トナル、$G^*(x_j) = x_j^* - X_j^*$ デアルカラ $G^*(x_{j_k}) \to -Y^*$ トナル、故ニ $\{G^*(x_j)\}$ ガ緊ッテヰルコトガ証明サレタ．