366. 曲面ノ漸近曲線ニ就イテ

金原　誠（旅順工大）

射影微分幾何ノ立場デ、漸近曲線ノ空間曲線トシテノ性質ト曲面ノ理論トノ関係ヲ調ベルノガ此ノ article ノ目的デス、此ノ考ヘデ l'arête de green ノ新シイ性質ヲ導キ，一二ノ射影的不変量ニ幾何學的意味ヲ與ヘ，又 Segre 切線及ビ Darboux 切線ノ一ツノ新シイ construction ヲ示シマス。

1. 曲面 S (non réglée) 上ノ1点 x ガソノ asymptotiques u, v ニヨッテ表ハサレテヰルモノトスレバ x ノ coordonnées projectives homogènes ハ次ノ聯立偏微分方程式ヲ満足シマス。(註1)

$$(1)\quad \begin{cases} x_{uu}=\theta_u x_u+\beta x_v+p_{11}x, \\ x_{vv}=\gamma x_u+\theta_v x_v+p_{22}x. \end{cases}$$

今

$$\begin{cases} x=x, \\ x_1=x_u+\lambda x, \\ x_2=x_v+\mu x, \\ x_3=x_{uv}+\mu x_u+\lambda x_v+\rho x, \end{cases}$$

但シ

$$\begin{cases} \lambda=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\beta}-\theta_u\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\gamma_v}{\gamma}-\theta_v\right), \\ \lambda\mu-\rho=\frac{1}{2}(\beta\gamma+\theta_{uv}) \end{cases}$$

ト置ケバ, x, x_1, x_2, x_3 ヲ頂点トスル repère ハ漸近切線ト第1種及ビ第2種ノ l'arête de Green ヲ稜トシ, 且ツ x_3 ハ Lie 点ニナリマス. 更ニ

$$\begin{cases} L=\theta_{uu}-\frac{1}{2}\theta_u^2-\beta\theta_v-\beta_v-2p_{11}, \\ M=\theta_{vv}-\frac{1}{2}\theta_v^2-\gamma\theta_u-\gamma_u-2p_{22}, \\ \mathcal{L}=2L-(\log\beta)_{uu}+\frac{1}{4}(\log\beta)_u^2, \\ \mathcal{M}=2M-(\log\gamma)_{vv}+\frac{1}{4}(\log\gamma)_v^2, \\ \mathcal{L}_1=2L+2(\log\gamma)_{uu}+(\log\gamma)_u^2, \\ \mathcal{M}_1=2M+2(\log\beta)_{vv}+(\log\beta)_v^2 \end{cases}$$

ト置ケバ $\mathcal{L}\,du^2+\mathcal{M}\,dv^2$ 及ビ $\mathcal{L}_1\,du^2+\mathcal{M}_1\,dv^2$ ハ invariante et intrinsèque ガアリ,(註2) 且ツ (1) ニヨッテ次ノ関係ヲ得マス。

$$(2)\quad \begin{cases} x_u=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\beta}-\theta_u\right)x+x_1, \\ (x_1)_u=-\frac{1}{4}\left\{\mathcal{L}+\beta(\log\beta^2\gamma)_v\right\}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\beta}+\theta_u\right)x_1+\beta x_2, \\ (x_2)_u=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\log\gamma)_{uv}+\beta\gamma\right\}x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\beta}-\theta_u\right)x_2+x_3, \\ (x_3)_u=-\frac{\beta}{4}\left\{\mathcal{M}_1+\frac{1}{4}(\log\beta^2\gamma)_v^2\right\}x+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\log\gamma)_{uv}+\beta\gamma\right\}x_1 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{4}\left\{\mathfrak{L}-\beta(\log\beta^2\gamma)_v\right\}x_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\beta}+\theta_u\right)x_3.$$

点 x ヲ通ル *ligne asymptotique* $v=\text{const.}$ 上ノ任意ノ一点ノ此ノ *repère* ニ関スル *coordonnées non homogènes* ヲ z^1, z^2, z^3 トスレバ $v=\text{const.}$ ノ方程式ハ (2) ニヨッテ

$$(3)\quad \begin{cases} z^2=\frac{\beta}{2}(z^1)^2-\frac{\beta}{24}\left\{\mathfrak{L}+\frac{\beta}{2}(\log\beta^2\gamma)_v\right\}(z^1)^4+\cdots\cdots, \\ z^3=\frac{\beta}{6}(z^1)^3-\frac{\beta}{40}\left\{\mathfrak{L}+\frac{5}{6}\beta(\log\beta^2\gamma)_v\right\}(z^1)^5+\cdots\cdots \end{cases}$$

トナリマス。

2. *ligne asymptotique* $v=\text{const.}$ ノ各点カラヒイタ切線ニヨッテ作ラレル *développable asymptotique* ヲ D_1 ト名付ケルト, D_1 ト x ニ於ケル曲面ノ切平面トノ交リノ曲線ハ (3) ニヨッテ

$$(4)\quad z^2=\frac{3}{8}\beta(z^1)^2-\frac{9}{640}\beta\left\{\mathfrak{L}+\frac{5}{2}\beta(\log\beta^2\gamma)_v\right\}(z^1)^4+\cdots\cdots$$

トナリ, 点 x ニ於ケルソノ *conique osculatrice* ハ

$$(5)\quad z^2=\frac{3}{8}\beta(z^1)^2-\frac{1}{10}\left\{\frac{\mathfrak{L}}{\beta}+\frac{5}{2}(\log\beta^2\gamma)_v\right\}(z^2)^2$$

トナリマス、此ノ *conique* ト xx_2 トノ交点ハ x 自身ト

$$x_2-\frac{1}{10}\left\{\frac{\mathfrak{L}}{\beta}+\frac{5}{2}(\log\beta^2\gamma)_v\right\}x$$

トデアッテ、コノ最後ノ点ト x_1 トヲムスブ直線ハ蘇歩青氏ノ定理ニヨッテ(註3)、上ノ *conique* ノ切線ニナッテ井マス、

コノ切線ヲ t_1 ト名付ケルコトニシマス、点 x ニ於ケル D_1 ノ complexe osculateur ニ関シテ此ノ切線 t_1 ニ共軛ナ直線ハ x ト

$$x_3+\frac{1}{10}\left\{\frac{\mathcal{L}}{\beta}-\frac{5}{2}(\log\beta^2\gamma)_v\right\}x_1$$

トヲムスブ直線デス、此ノ直線ヲ S_1 ト名付ケルコトニシマスト次ノ proposition ヲ得マス。

"Développable asymptotique D_1 ト切平面トノ交ハリノ曲線ノ点 x ニ於ケル conique osculatrice ガ漸近切線 xx_2 ト交ハッタ点ニ於テ conique ニヒイタ切線ヲ t_1 トシ，D_1 ノ complexe osculateur ニ関シテ t_1 ト共軛ナ直線ヲ S_1 トスレバ，S_1 ト漸近切線 xx_1 トニヨッテ定メラレル平面ハ第1種ノ l'arête de green ヲ通ル。"

Ligne asymptotique $u=$ const. ノ各点ニ於ケル切線ニヨッテ作ラレル développable asymptotique D_2 ニ関シテモ同様ナコトガ成立チマスカラ此ノ定理ニヨッテ第1種ノ l'arête de green ヲ決定スルコトガ出来マス。尚ホ次ノ proposition モ容易ニ証明出来マス。

"t_1 ト S_1 トガ点 x ニ於ケル Darboux 二次面ニ関シテ共軛ナルタメニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ $\mathcal{L}=0$ デアッテ，コノ場合ニ限リ t_1 ト xx_2 トノ交点ハ第2種ノ Directrice de Wilczynski 上ニアル。"

$\mathfrak{M}=0$ トイフコトノ幾何學的意味モ全ク同様デス。

3. 今 $\sigma=\beta^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}\theta}$ トシ

$$\begin{cases} y=\sigma x, \\ y_1=\sigma x_1, \\ y_2=-\frac{1}{10}\left\{\mathfrak{L}+\frac{5}{2}\beta(\log\beta^2\gamma)_v\right\}\sigma x+\sigma\beta x_2, \\ y_3=\tau\sigma x+\frac{1}{10}\left\{\mathfrak{L}-\frac{5}{2}\beta(\log\beta^2\gamma)_v\right\}\sigma x_1+\sigma\beta x_3 \end{cases}$$

ト置ク、但シコヽニテハ y_3 ガ S_1 上ノ *point de coïncidence*(註4) ニナルヤウニ取レコトニシマス、然ルトキハ(2)ニヨツテ次ノ基本方程式ヲ得マス。

$$(6)\quad \begin{cases} y_u=y_1, \\ (y_1)_u=-\frac{3}{20}\mathfrak{L}y+\frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\beta}y_1+y_2, \\ (y_2)_u=\nu_1 y-\frac{1}{5}\mathfrak{L}y_1+\frac{\beta_u}{\beta}y_2+y_3, \\ (y_3)_u=\rho_1 y+\nu_1 y_1-\frac{3}{20}\mathfrak{L}y_2+\frac{3}{2}\frac{\beta_u}{\beta}y_3. \end{cases}$$

où

$$(7)\quad \begin{cases} \nu_1=\frac{\beta}{2}\left\{\beta\gamma-(\log\beta)_{uv}\right\} \\ \rho_1=\frac{\beta}{20}\left[\frac{\beta_u}{\beta}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\beta}\right)_u-2\left(\frac{\mathfrak{L}}{\beta}\right)_{uu}-\frac{4}{5}\beta\left(\frac{\mathfrak{L}}{\beta}\right)^2-5\beta\mathfrak{M}_1\right] \end{cases}$$

$\nu_1 du^3$ 及ビ $\rho_1 du^4$ ハ *invariantes et intrinsèques* デアツテ蟹谷敎授ニヨツテ夫々曲線ノ第1種及ビ第2種ノ射影的線元素ト呼バレテキルモノデス。(註5)

y, y_1, y_2, y_3 ヲ頂点トスル repère ニ関シテハ漸近曲線 $v=const.$ ノ方程式ハ

$$(8)\quad \begin{cases} \zeta^2=\dfrac{1}{2}(\zeta')^2+\dfrac{\nu_1}{60}(\zeta')^5+\dfrac{1}{360}\left(\dfrac{\partial\nu_1}{\partial u}-\dfrac{3}{2}\dfrac{\beta_u}{\beta}\nu_1+5\rho_1\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\zeta')^6+\cdots\cdots, \\ \zeta^3=\dfrac{1}{6}(\zeta')^3+\dfrac{\nu_1}{60}(\zeta')^6+\dfrac{1}{2520}\left\{7\left(\dfrac{\partial\nu_1}{\partial u}-\dfrac{3}{2}\dfrac{\beta_u}{\beta}\nu_1\right)\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left.+25\rho_1\right\}(\zeta')^7+\cdots\cdots \end{cases}$$

トナリマス。漸近曲線 $u=const.$ ノ第1種及ビ第2種ノ射影的線元素ヲ夫々 $\nu_2 dv^3$, $\rho_2 dv^4$ トスレバ ν_2 及ビ ρ_2 ハ (7) ト類似ノ式ニナリマス。

D_1 ガ un complexe linéaire ニ属スル條件ハ $\nu_1=0$ デスカラ，今ノ場合ニハ

$$(\log\beta)_{uv}=\beta\gamma$$

トナリマス、コレハヨク知ラレタ結果デス。尚コノ場合ニ限リ第2種元素 ρ_1 ガ u ノミノ函数トナリマス。

特ニ $\nu_1=\nu_2=\mathcal{L}=\mathcal{M}=\mathcal{L}_1=\mathcal{M}_1=0$

トイフ場合ヲ考ヘルト，カヤウナ曲面ハ

凡テノ漸近曲線ガ3次曲線デ且ツ曲率 $-\frac{1}{2}$ ナル Fubini 曲面ニナリマス、從ッテ此ノ曲面ハ ∞^3 ノ曲面ニ射影的ニ変形スルコトガ出来マス。

4. 始メノ repère ニ戻ッテ repère ノ第四番面 $x_1x_2x_3$ ト D_1 トノ交ハリノ曲線ヲ考ヘマス．コノ平面上ノ点ヲ $\xi^1x_1+\xi^2x_2+\xi^3x_3$ デ表ハスコトニシ $\zeta^1=\dfrac{\xi^2}{\xi^1}, \zeta^2=\dfrac{\xi^3}{\xi^1}$

トオケバ曲線ノ方程式ハ(3)ニヨツテ

$$(9)\quad \zeta^2=\frac{1}{2\beta}(\zeta')^2+\frac{1}{24\beta^2}\left\{\frac{L}{\beta}-\frac{1}{2}(\log\beta^2\gamma)_v\right\}(\zeta')^4+\cdots\cdots$$

トナリマス。x_1 ニ於テコレト3次ノ切触ヲナシ，且ツ x_3 ニ於テ x_2x_3 ニ切スル conique ハ

$$(10)\quad (\xi^2)^2-2\beta\xi'\xi^3=0$$

同様ニ D_2 ト $x_1x_2x_3$ トノ交リノ曲線カラ conique

$$(11)\quad (\xi')^2-2\gamma\xi^2\xi^3=0$$

ヲ得マス。(10) ト (11) トノ 4ツノ交点ヲ通ル3對ノ直線ハ

$$\begin{cases}\gamma^{\frac{1}{3}}\xi^2-\beta^{\frac{1}{3}}\xi'=0, \\ \gamma^{\frac{1}{3}}\xi^2+\beta^{\frac{1}{3}}\xi'+2\beta^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}}\xi^3=0\end{cases}\qquad etc.\ etc.$$

ヨツテ次ノ proposition ヲ得マス。

"(10) ト (11) ノ 2 coniques ノ 4ツノ交点ヲ通シ3對ノ直線ガ切平面ト交ハツタ点ヲ点 x トムスベバ Segre 切線及ビ Darboux 切線ヲ得ル."

註1. G. Fubini – E. Čech, geometria proiettiva differenziale, T. I, p. 90.

2. Ibd. p. 96.

3. B. Su, on the intersection of two curves in space, (東北數誌, V. 39, 1934, p. 226–232.).

4,5. J. Kanitani, sur les repères mobiles attachés

à une courbe gauche, (Mem. Ryo. Coll. Eng., V. 6, 1933, p. 91—113.).