372. 有理型函數論ニ於ケル函數 $m(r, a)$ ニ就イテ, II

角谷静夫（阪大）

次ニ更ニ一般ナ除外値ノ集合ノ測度ヲ考ヘル。

コノタメニ Capacity ノ考ヲ拡張スル。[6]

Riemann Sphere Σ 上ノ点集合 E ガ與ヘラレタトキ任意ノ $\delta>0$ ニ對シテ

$$u^{\delta}(a)=\int_{\Sigma}\frac{1}{[w,a]^{\delta}}\,d\mu(w)$$

ヲ考ヘル。コヽニ μ ハ total ノ 1 ノ Mass ノ E 上ヘノ分布ヲ表ハス。 $\underset{a\in\Sigma}{\mathrm{O.G}}\ \mu^{\delta}(a)=M_{\mu,\delta}(E)$ ノアラユル μ ニ関スル下限ヲ $\nabla_{\delta}(E)$ トシ,

$C_{\delta}(E)=\left(\nabla_{\delta}(E)\right)^{-\frac{1}{\delta}}$ ニヨッテ E ノ δ-capacity ヲ定義スル。（記号ノ複雑サヲ避ケルタメニ）

前号ニテ ∇_E, C_E ニテ表ハシタモノヲ $\nabla(E)$, $C(E)$ ニテ表ハスコトニスル。

此ノ如ク δ-Capacity ヲ定義スレバ次ノ定理ガ成立スル。

定理 $f(z)$ ガ $|z|<R$ ニテ有理型ニテ $\lim_{r\to R}T(r)=\infty$ デアレバ任意ノ $\delta>0$ ニ對シテ

---

[6] Frostman: Thèse, 48 p.

$$\overline{\lim_{r\to R}} \frac{m(r,a)}{\log T(r)} > \frac{1}{\delta} \tag{6}$$

ガ成立スル点 a ノ集合 E_δ ハ δ-capacity 0 デアル。

証明： 先ヅ $\nabla_\delta(E)$ 及ビ $C_\delta(E)$ ニ関スル二三ノ不等式ヲ証明スル。

$E \subset \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ デアレバ

$$\frac{1}{\nabla_\delta(E)} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nabla_\delta(E_n)} \tag{7}$$

ナルコトハ $\nabla(E) \equiv \nabla_E$ ノ場合ト同様ニ証明スルコトガ出来ル。[7]

又 $\delta > \delta' > 0$ ニ對シテ

$$\left[\int_\Sigma \frac{1}{[w,a]^\delta} d\mu(w)\right]^{\frac{1}{\delta}} \geqq \left[\int_\Sigma \frac{1}{[w,a]^{\delta'}} d\mu(w)\right]^{\frac{1}{\delta'}}$$

$$\geqq \exp.\left[\int_\Sigma \log \frac{1}{[w,a]} d\mu(w)\right]$$

デアルカラ

$$\left(\nabla_\delta(E)\right)^{\frac{1}{\delta}} \geqq \left(\nabla_{\delta'}(E)\right)^{\frac{1}{\delta'}} \geqq e^{\nabla(E)} \tag{8}$$

又ハ $\quad C_\delta(E) \leqq C_{\delta'}(E) \leqq C(E)$ (9)

---

7) Frostman: Thèse 53頁参照。コヽノ証明デハ

$$\frac{1}{\nabla(E_n)} \geqq \frac{m_n}{\nabla(E)+\varepsilon} \quad ヨリ \quad \frac{1}{\nabla(E_n)} \geqq \frac{m_n}{\nabla(E)}$$

ナル関係ヲ出シテアリマスガ、コレハ n ニ関スル和ヲ取ッテカラ $\varepsilon \to 0$ トスルベキデアルト思ヒマス。

又(7)ヨリ δ-capacity 0 ナル集合ノ可附番個ノ和集合ハ又 δ-capacity 0 デアルコトガワカル。

依ッテ定理ヲ証明スルニハ

$$\overline{\lim_{r\to R}}\frac{m(r,a)}{\log T(r)}>\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right) \tag{10}$$

ヲ満足スル点 a ノ集合 $E_{\delta,m}$ ガ δ-capacity 0 デアルコトヲ示セバ十分デアル。($E_\delta\subset\sum_{m=1}^{\infty}E_{\delta,m}$ デアルカラ)

次ニ r_n ヲ $T(r_n)=n$ ニヨッテ定義シ ($r_n\uparrow R$ トナル)

$$m(r_n,a)>\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right)\log n \tag{11}$$

ヲ満足スル点 a ノ集合ヲ $E_{\delta,m,n}$ トスレバ，任意ノ N ニ対シテ

$$E_{\delta,m}\subset\sum_{n=N+1}^{\infty}E_{\delta,m,n}\equiv E^{N}_{\delta,m} \tag{12}$$

デアル。何者，モシ

$$a\,\overline{\in}\,E^{N}_{\delta,m}$$

デアレバ $n>N$ ニ対シテ $a\,\overline{\in}\,E_{\delta,m,n}$ デアルカラ

$$m(r_n,a)\leqq\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right)\log n=\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right)T(r_n)$$

トナリ $r_n\leqq r<r_{n+1}$ ニ於テハ

$$\begin{aligned}m(r,a)&=\{T(r,a)-T(r_n,a)\}-\{N(r,a)-N(r_n,a)\}\\&\quad+m(r_n,a)\leqq m(r_n,a)+1\end{aligned}$$

デアルカラ

$$\overline{\lim_{r\to R}}\frac{m(r,a)}{\log T(r)}\leqq\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

トナッテ(10)が成立シナイ。ヨッテ $a\in E_{\delta,m}$ トナル。

トコロが $E_{\delta,m,n}$ ノ定義(11)ヨリ、前号デ述ベタト同様ナ計算ヲスレバ

$$\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right)\log n\leqq\nabla(E_{\delta,m,n})$$

(8)ヨリ

$$\left(\nabla_{\delta}(E_{\delta,m,n})\right)^{\frac{1}{\delta}}\geqq n^{\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right)}$$

又ハ

$$\frac{1}{\nabla_{\delta}(E_{\delta,m,n})}\leqq\frac{1}{n^{1+\frac{1}{m}}}$$

ヨッテ(12)ヨリ任意ノNニ對シテ

$$\frac{1}{\nabla_{\delta}(E_{\delta,m})}\leqq\frac{1}{\nabla_{\delta}(E^{N}_{\delta,m})}\leqq\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{m}}}$$

右辺ノ級数ハ収斂スルカラNヲ十分大キクトレバイクラデモ小サクナル。即チ $E_{\delta,m}$ ハ δ-capacity 0 デアル。(証明終)

コノ定理ハ Ahlfors ノ定理[8] ニ相當スルモノデアルが Ahlfors ノ定理ハ E_δ が t^δ-measure 0 デアルコトヲ云ッテヰル。

---

8) Ahlfors ノ論文(前号 脚註(5)) 及ビ清水先生：輓近函数論 149頁参照。

Frostman ノ証明シタ如ク[9] E ノ δ — capacity ガ 0 デアレバ

$$\int_0 \frac{h(t)}{t^{\delta+1}}\,dt$$

ガ有限デアル如キ $h(t)$ ＝對シテ E ハ h — measure ガ 0 トナル（$\delta = 0$ ナルトキハ logarithmic capacity ヲトル）カラ、前号ノ定理ハ明カ＝コレ＝相當スル Ahlfors ノ定理ノ拡張＝ナツテキルガ、本号ノ定理ハ、ソノマヽノ形デハ必ズシモコレ＝相當スル Ahlfors ノ定理ノ拡張＝ハナツテキナイ[10]。

然シ上＝述ベタコト＝ヨツテ

$$E_\delta \subset \sum_{m=1}^{\infty} E_{\delta, m}$$

デアツテ、各々ノ $E_{\delta,m}$ ハ δ — capacity ガ 0 デアルノミデナク $\delta_m = \delta\left(1 + \frac{1}{2m}\right)$ トオケバ δ_m — capacity ガ 0 デアルカラ上記ノ Frostman ノ定理＝ヨツテ

$$\int_0 \frac{h(t)}{t^{\delta_m+1}}\,dt$$

ガ存在スル如キ $h(t)$ ＝対シテ $h(t)$ — measure ガ 0 トナル。

---

9) Frostman: Thèse 86 頁.

10) E ノ δ — capacity ガ 0 デアルトキ E ハ t^δ — measure ガ 0 デアルカドウカハ分ラナイ。

依ツテ $E_{\delta,m}$ ハ t^{δ}-measure 0 デアル。

t^{δ}-measure 0 ナル集合ノ可附番個ノ和ハ又 t^{δ}-measure 0 デアルカラ E_{δ} ハ t^{δ}-measure 0 デアル。