374. Totale ナ線状汎函數ノ集合ニツイテ

近 藤 明 久（東大學生）

平凡ナコトデスカラ既知ノ事カモ知レマセンガ。

Eヲ線状D空間、$\overline{E}$ヲソノ共軛空間（espace conjugué）

$A \subseteqq \overline{E}$ナル任意ノ集合Aヲトリ、Aヲ含ム$\overline{E}$内ノ凡テノ一次超限閉集合（transfiniment fermé）ノ共通部分Tヲ假リニ超限閉被ト名ヅケレバ之レハAヲ含ム最小ノ一次超限閉集合デ且ツ、

（定理1）　Aガ totale（Banach＝ヨル）ナルタメノ必充條件ハAノ超限閉被ガ$\overline{E}$ト一致スルコトデアル。

（証明）　$T \neq \overline{E}$ナラ　$f_0 \subset \overline{E} - T$トスルト

$f_0(x_0) \neq 0$　　$f \subset T$ニツキ（即チ$f \subset A$ニツキ）$f(x_0) = 0$

ナル$x_0 \subset E$ガアルカラAハ totale デナイ。

逆ニ凡テノ$f \subset A$ニツキ$f(x_0) = 0$トスル。

Aノ一次被ヲΓ; Γ_1ヲΓノ超限導集合トスル、ϑガ nombre-limite ノトキ$\Gamma_\vartheta = \sum_{\xi < \vartheta} \Gamma_\xi$

ソウデナイトキニハ$\Gamma_\vartheta = (\Gamma_{\vartheta-1})_1$トスル。

Γガ一次集合ダカラ

$$\Gamma \subseteqq \Gamma_1 \subseteqq \Gamma_2 \subseteqq \cdots\cdots$$

$$\xi < \eta \text{ ノトキ } \Gamma_\xi \subseteqq \Gamma_\eta$$

Γ_ϑ ハ一次集合デアル。

$\Gamma \subseteqq T$, 超限閉集合ハ *reguliérement fermé* デアルコトカラ其ノ超限集積点ヲ含ム。

$$\therefore \quad \Gamma_\vartheta \subseteqq T$$

Element ノ増加ヲ考ヘレバ、アル η ニツキ $\Gamma_\eta = (\Gamma_\eta)$,

$$\therefore \quad \Gamma_\eta = T$$

x_0 ハ A ト直交スルカラ $\Gamma, \Gamma_1, \cdots\cdots, \Gamma_\vartheta, \cdots\cdots$ ト直交スル.
故ニ T ト直交スル。

$$\therefore \quad T = \bar{E} \text{ ナラバ } x_0 = 0$$

A ハ *totale* ニナル。

（E ガ *complet* デ *séparable* ナルトキハ勿論 T ハ一次弱閉被デヨイ）

M $\subseteqq$ E ト A $\subseteqq \bar{E}$ トガ *biorthogonale*

即チ $M = \{a\}$ $A = \{f_a\}$ $f_a(a) \neq 0$ $f_a(a') = 0$ $(a \neq a')$ トスル。

（定理2） A ヲ *totale* トスル.

M ガ E デ *fondamentale* デアルタメノ必充條件ハ

$$\prod_{f_a \subset A} T[A - f_a] = 0$$

コヽニ $T[A - f_a]$ ハ $A - f_a$ ノ超限閉被トスル。

(証 明) Mガ *fondamentale* トスル.

$f\subset T[A-f_a]$ トスレバ $f(a)=0$

∴ $f_0\subset \prod_{f_a\subset A} T[A-f_a]$ トスレバ

Mノ任意ノ要素 a ニ對シ $f_0(a)=0$ ∴ $f_0=0$

∴ $\Pi=0$

逆ニ $\Pi=0$ トシテ、$f_0\subset \bar{E}$ ガ M ノ全テノ a ニ對シ

$f_0(a)=0$ トスル。

$f_0\ \bar{\subset}\ T[\Gamma-f_a]$ ナラバ

$f_0(b)\neq 0$ $f_{a'}(b)=0$ $(a'\neq a)$ ナル $b\subset E$ アリ。

$f_a(a)\neq 0$ ナル故 $f_a(b)=\lambda f_a(a)$ トスル。

Aノ任意ノ要素 $f_{a''}$ ニツキ $f_{a''}(b-\lambda a)=0$

∴ $b=\lambda a$

$f_0(b)=\lambda f_0(a)=0$ 之ハ不合理

∴ $f_0\subset T[\Gamma-f_a]$ $f_0\subset\Pi$, ∴ $f_0=0$

∴ Mハ *fondamentale* トナル。

*同様ニMヲ *fondamentale* トスルト

Aガ *totale* デアルタメノ必充條件ハ

$$\prod_{a\subset M}[M-a]=0$$

コヽニ $[M-a]$ ハ $M-a$ ノ一次閉被トスル.