375. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, VI

福原 満洲雄(北大)

§1. 微分方程式

$$(1)\qquad x\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

ニ於テ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ハ共通ナ因子ヲ含マナイ y ノ整多項式デ、ソノ係数ハ $x=0$ デ正則ナ函数トシ、ソレヲ x, y ノ昇冪ニ整頓シテ書イタモノヲ

$$P(x,y)=a_0(x)+a_1(x)y+\cdots\cdots+a_p(x)y^p$$

$$Q(x,y)=b_0(x)+b_1(x)y+\cdots\cdots+b_q(x)y^q$$

$$a_j(x)=a_jx^{m_j}+\cdots\cdots\qquad(a_j\neq 0)$$

$$b_k(x)=b_kx^{n_k}+\cdots\cdots\qquad(b_k\neq 0)$$

トスル。

$$m_j-j\rho\qquad(j=0,1,\cdots\cdots,p)$$

ノ中ニ最小ノモノガ少クトモ二ツアル場合ニ ρ ヲ P-order,

$$n_k-(k+1)\rho\qquad(k=0,1,\cdots\cdots,q)$$

ノ中ニ最小ノモノガ少クトモ二ツアル場合ニ ρ ヲ Q-order, 此等 ($p+q+2$) 個ノ数ノ中ニ最小ノモノガ少クトモ二ツアル場合ニ ρ ヲ R-order ト名ヅケ, (IV) ニ於テ ρ ガ P-order デモ, Q-order デモ, R-order デモナイ時ヲ調ベタ, 次ニ (V) デ ρ ガ Q-order デモ R-order デモナイ P-order デアル場合ヲ調ベテ, ソ

ノ様ナ order ノ存在ハ大勢ニ影響ガナイコトヲ確メタ、ソレニ較ベルトP-order デモ R-order デモナイQ-order ニ於ケル様子ヲ調ベルコトハ稍々面倒デアル。以下コノ場合ニツイテ簡単ニ述ベヨウ。

§2. ρ ヲ P-order デモ, R-order デモナイ Q-order デアルトスル。

$$\min\{m_j - j\rho\} = m_\alpha - \alpha\rho$$

$$\min\{n_k - (k+1)\rho\} = n_\beta - (\beta+1)\rho,$$

$$n_{\beta'} - (\beta'+1)\rho, \cdots\cdots$$

トスル。α ハ唯一ツ, $\beta, \beta', \cdots\cdots$ ハ少クトモ二ツアリ,

$$\sigma = \beta - \alpha + 1, \quad m_\alpha - n_\beta = \mu$$

ト置ケバ $\mu + \sigma\rho < 0$ デアル。故ニ $y = x^{-\rho} z$ ト置イテ得ラレル z ノ方程式

$$(2) \quad x\frac{dz}{dx} = \frac{P_1(x, z)}{Q_1(x, z)}$$

ノ主ナ部分カラ成ル方程式ハ

$$(3) \quad x\frac{dz}{dx} = x^{\mu+\sigma\rho}\frac{a_\alpha z^\alpha}{\sum' b_k z^k}$$

デアル、但シ $\sum'$ ハ $k = \beta, \beta', \cdots\cdots$ ニ関スル和ヲ表ハス、此ノ方程式ノ形カラ次ノ五ツノ場合ヲ區別スル必要ガアル。

1° 総テノ β ガ $\alpha - 1$ ヨリ大キイ.

2° 総テノ β ガ $\alpha - 1$ ヨリ小サイ。

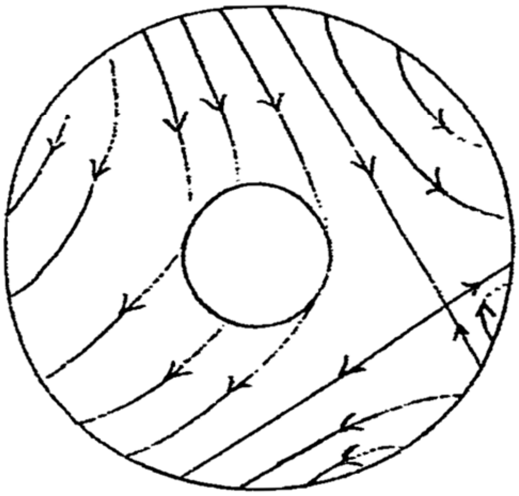
3° $\alpha - 1$ ニ等シイ β ガ存在シ、其ノ他ノ β ハ $\alpha - 1$ ヨ

リ大キイ。

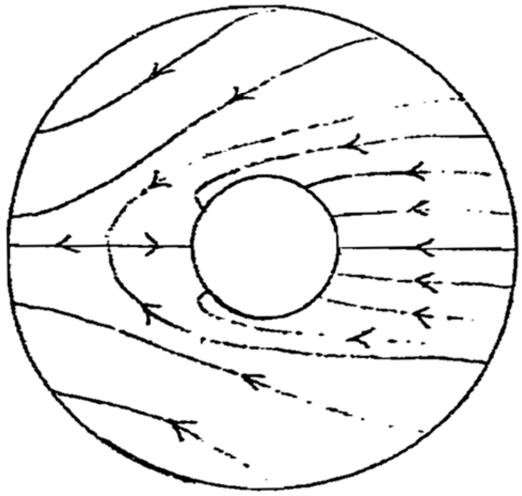
4° $\alpha-1$ =等シイ β ガ存在シ、其他ノ β ハ $\alpha-1$ ヨリ小サイ。

5° $\alpha-1$ ヨリ大キナ β モ小サイ β モ共=存在スル。

1° ト 2°, 3° ト 4° ハ α ヲ $\frac{1}{\alpha}$ デ置換ヘルコト=ヨリ一方カラ他ヘ移ルカラ本質的=異ルノハ三ツデアル。

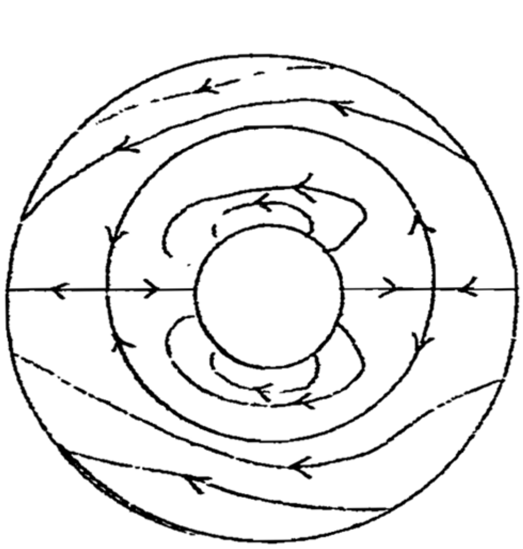


第 1 圖



第 2 圖

正ノ數 ε ガ十分=小サケレバ $\rho\pm\varepsilon$ ハ P-order デモ, Q-order デモ, R-order デモナイカラ (IV) デ述ベタ所=ヨリ、ソコ=於ケル型ヲ決定スルコトガ出來ル、ソノ結果



第 3 圖

1° $\rho\pm\varepsilon$ =於テ B′ 型

3° $\rho+\varepsilon$ =於テ B′ 型, $\rho-\varepsilon$ =於テハ A 型又ハ A′ 型,

但シ $R(a_\alpha/b_{\alpha-1})\neq 0$ トスル。

5°　$\rho+\varepsilon$ ニ於テ B'型，$\rho-\varepsilon$ ニ於テ B型．

之ノ描ク曲線ガ第1圖ノヤウニナレバ 1° ノ場合，第2図ノヤウニナレバ 3° ノ場合，第3図ノヤウニナレバ 5° ノ場合デアル、矢ハ x ノ減少スル方向ヲ示スモノデ，第2図ハ $\rho-\varepsilon$ ニ於テ A型トナル場合ヲ示シ、ソコニ於ケル矢ノ方向ヲ逆ニスレバ $\rho-\varepsilon$ ニ於テ A'型ノ場合ヲ得ル。

§3.　(2),(3) ヲ比較スルニハ方程式

$$\sum{}' b_k z^k = 0 \tag{4}$$

ノ根ノ近傍ヲ除カナケレバナラナイ、ソノ一ツノ根ヲ z_1 トシタトキ．z_1 ノ近傍ヲ調ベルニハ $u=z-z_1$ ナル置換ヲ行ッテ得ラレル u ノ方程式ガ更ニ負ノ Q-order ρ ヲ持テバ $u=x^{-\rho}v$ ナル置換ヲ行ヒ v ニ関スル方程式ヲ作レバ、ソレニ對シテ §2 ノ結果ガソノママ使ヘル、而モソノ時ニ起リ得ル場合ハ 1° ダケデアル。(4) ニ相當スル v ノ方程式

$$\sum{}' \bar{b}_k v^k = 0 \tag{5}$$

ガ 0 デナイ根 v_1 ヲ持テバ $w=v-v_1$ ト置ク、コノヤウニシテ進ンデ行ケバ最後ニ達スル方程式

$$x\frac{dY}{dx} = x^{-\lambda}\frac{P_2(x,Y)}{Q_2(x,Y)} \qquad (\lambda>0)$$

ニ於テハ

$P_2(0,0)\neq 0,$

$$Q_2(x,Y) = B_\nu(x)Y^\nu + B_{\nu+1}(x)Y^{\nu+1} + \cdots\cdots$$
$$B_\nu(0) \neq 0$$

トナル、ソコデ $Y^{\nu+1}=Z$ ト置キ、Z ノ方程式ヲ作レバ $Z=0$ ノ近傍デ比較定理ガ使ヘルカラ（右辺ガ Z ノ多價函数トナルコトハ邪魔ニナラナイ）$Z=0$ ノ近傍ニ於ケル解ノ様子ガ分ル。コノヤウニシテ P-order デモ R-order デモナイ Q-order ハ片ガ附ク。

以上ノ考察カラ分ル重要ナ事柄ハ

「ρ ガ R-order デナケレバ，初期條件

$$x_0^{-\rho+\varepsilon} < |y(x_0)| < x_0^{-\rho-\varepsilon} \qquad (\varepsilon, x_0 > 0)$$

ヲ満足スル (1) ノ解ハ必ズ $0, x_0$ ノ間ノ或 x デ

$$|y(x)| = x^{-\rho+\varepsilon} \quad 又ハ \quad |y(x)| = x^{-\rho-\varepsilon}$$

トナル」 ト云フコトデアル。故ニ「勝手ナ正ノ数 ε ニ對シテ $x \to +0$ ノトキ

(6) $\quad x^{-\rho+\varepsilon} < |y(x)| < x^{-\rho-\varepsilon}$

ガ成立スルナラバ ρ ハ R-order デナケレバナラナイ」

併シ「(1) ノ勝手ナ解 $y(x)$ ヲ取ッタトキ (6) ガ成立スルヤウナ ρ ガ存在スル」ト言ヘルデアラウカ？

ソレガ証明サレタラ彼岸ハ近イノデアルガ、今マデノ結果ダケデハ未ダ十分デナイ、差當ッテコレヲ目標トシテ進マウ。