381. 數學雜話

松 村 宗 治（台北大）

（I）相對微分幾何ヲ Synge ノ論文: The proportionality of Energy and Frequency for a photon in general Relativity, The quaterly Journ. of Math. Vol. 6, NO. (1935) p. 203 ニ應用スルコトが出來ル。

コノ場合ニハ同論文ノ記号ヲ用ヒテ

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{\nu_0}{\nu}$$

トナルが故ニ

$$\rho = \frac{\nu_0}{\nu}$$

トナル、コヽニ ρ ハ相對的曲率半徑デアッテ

$$\frac{ds}{ds_0} = \rho$$

デアル。

(II) 一平面上ニテ原点ヨリ出ヅルニツノベクトルヲ ξ, η トセバ其間ノ角 φ ハ

$$\cos^2\varphi = \frac{(\xi\eta)^2}{(\xi\xi)(\eta\eta)}$$

デ與ヘラルヽコトハ、ヨク知ラレテオル、然シテ相對微分幾何學デハ前ニコヽデ述ベシヤウニ原点ヨリ出ルベクトルハ

$$\sqrt{q}\,R$$

デ表ハサレ得。デアルカラ φ ハ相對微分幾何ニ於テモ初等的ノ場合ト同様デアルコトガ分ル、此ノコトガ n 次元空間ノ場合ニモイヘルカラ次ノ事ガ分ル。

相関係数ハ相対的空間ニ於テモ初等的空間ニ於テト同様デ変リナシ。

ナゼナレバ二組ノ n 個ノ実験値ガ得ラレテ其ノ相関係数ヲ求ムルコトハ n 次元空間内ニ二組ノ値ニ相當スル二点ヲトリ其等ノ点ヲ原点ヨリ結ブ二ツノベクトルノ間ノ角ノ餘弦ニ相當スルカラデアル。

(III) 相對的空間ニ於テ Inversion ノ理論ヲ組立テルコトガ出來ル、今前ニ考ヘタ動径ヲ相對的空間ニテ考ヘルトキハ

$$\sqrt{q}\,R = \frac{a^2}{\sqrt{q'}\,R'}$$

但シ a ハ常數デアル。

尚亦

$$q\,ds = \frac{q'\,ds'^2}{a^4}$$

ガ成立ツ、ds ハ初等的線デソレニ對應セル初等的線素ヲ ds' デ表ハシタ。

ソコデ $\sqrt{q}R$ ヲ新ニ $\mathfrak{r}$ トオキ又 $\sqrt{q'}R'$ ヲ $\mathfrak{r}'$ トオケバ *Rothe* ノ論文ノ理論ガイヘルコトニナル。(*Math. Ann.* 72, S. 57 參照)

(IV) *Minkowskis Krümmungsbild* ノ式ハ

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \bar{\rho}^{-\frac{1}{3}}(\varphi)$$

デアル、從ッテ普通ノ記法ヲ用ヒテ此ノ曲線ノ相對幾何ハ次ノ様ニナル。

$$r = \bar{\rho}^{-\frac{1}{3}}(\mathfrak{r}) \big/ \bar{\rho}^{-\frac{1}{3}}(u)$$

コノ r ハ相對的距離デアル、次ニ dS ヲ相對的線素トセバ

$$dS = \bar{\rho}^{-\frac{1}{3}}(u)\,ds$$

デアル。亦

$$\frac{ds}{d\sigma} = \rho = \frac{d\bar{s}(\mathfrak{r})}{d\bar{s}(u)}$$

$$= \frac{\left\{9\bar{\rho}^2(\mathfrak{r}) + 4\bar{\rho}'^2(\mathfrak{r}) - 3\bar{\rho}(\mathfrak{r})\bar{\rho}''(\mathfrak{r})\right\}\bar{\rho}^{\frac{7}{3}}(u)}{\bar{\rho}^{\frac{7}{3}}(\mathfrak{r})\left\{9\bar{\rho}^2(u) + 4\bar{\rho}'^2(u) - 3\bar{\rho}(u)\bar{\rho}''(u)\right\}}$$

デアル、コヽニ ρ ハ相對的曲率半徑デアル。

今ソレガ零ナレバ $\bar{\rho}(u)$ ガ零カ又ハ分子ノ $\{\ \ \}$ ガ零

トナル。

後者ヨリ $\overline{\rho}(\psi)=0$ カ又ハ拋物線ガ得ラレル。(Mohrmann: Beständig gleichartig gekrümmte Kurven, Math. Ann. 72, S. 290 參照セラルベシ)

斯ノ如クシテ卵形線ノ場合ニ成立スル諸公式ヲ吾人ノ曲線ニ適用シテミルト上ノ樣ニナル、其ノ他同樣ニ得ラルヽワケデアル。

例ヘバ

$$d=\sqrt{\overline{\rho}^{-\frac{1}{3}}(\psi)\,\overline{\rho}^{-\frac{1}{3}}(u)\,(\psi_1-\psi_2)^2}$$

デアル。

(V) 自分ハ以前東北數誌19, p.11ニ於イテ論ジタル拙文ヲ相對微分幾何ニテモ論ジ得ベシ。ソノ爲ニハ先ヅ

$$f(\psi,r)=\int_0^l\left\{\sqrt{\rho\rho_0(\psi(s)-\psi_0)^2}-r\right\}^2 ds$$

(ρ_0, ψ_0 ハ定數)

ヲ考ヘテ $f'_r=0$, $f'_\psi=0$ 等ヲ考ヘルトヨイ。ρ ハ ψ ノ函數トミレバヨイ、s ハ相對的曲線ノ長サデアル、ツマリ余ノ上記拙文ト平行ニ考ヘテユケバヨイ。

(VI) 以前考ヘタ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}=\frac{\partial\log\sin w}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\log\cos w}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdots\cdots(1)$$

ヲ考ヘルトキハ、此ノ不變式H, Kハ下ノ樣ニナル。

$$H=-\frac{\partial^2 \log \sin w}{\partial u \partial v}+\frac{\partial \log \sin w}{\partial v}\,\frac{\partial \log \cos w}{\partial u},$$

$$K=-\frac{\partial^2 \log \cos w}{\partial u \partial v}+\frac{\partial \log \sin w}{\partial v}\,\frac{\partial \log \cos w}{\partial u}.$$

サテ $K=0$ ナル場合ニハ (1) ノ解ハ

$$\cos w\left(V+\int U \tan w\, du\right) \tag{2}$$

トナルガ故ニA表面ノ相對的距離 p ハ下ノ如シ。

$$p=\frac{V_1+\int U_1 \tan w\, du}{V_0+\int U_0 \tan w\, du}$$

コヽニ U ハ u ノミノ函數, V ハ v ノミノ函數デアリ其等ノ相異ナル値ヲ U_0, U_1 等デ表シタ。

$H=0$ ノ場合モ同樣デアル。(Eisenhart: Transformations of surfaces, p. 73 參照)