383. locally compact ナ topological group ノ連続表現

吉田 耕作（阪大）

$\overline{\mathfrak{G}}$（其ノ element ヲ $a, b, c,$ ……… デ表ハス）ヲ locally compact 且ツ connected ナ topological group トシ之レヲ距離付ケラレタ環 R ニ横ハル群 $\mathfrak{G}$ デ stetig isomorph ニ表現スル。

isomorphism ヲ $a \longleftrightarrow D(a)$ トスルト $D(a)$ ハ a ノ連続函数デアル。

然ラバ

定理1. $\mathfrak{G}$ ガ有限次元ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ次ノ意味デ Lie 群デアル。コノコトヲ $\mathfrak{G}$ ガ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ Lie 表現デアルト呼バウ。

R＝ real number ヲ係数トシテ一次独立ナ $U_1, U_2,$ ………, U_k ガアツテ之ノ real number ニヨル一次結合ノ全体ヲ $\mathfrak{T}$ トスレバ

$$\begin{cases} a \text{ ガ充分 } e \text{ ニ近イト } D(a) = \exp. U_a,\ U_a \in \mathfrak{T}, \\ U \in \mathfrak{T} \text{ ナラバ } \exp. U \in \mathfrak{G}, \\ \mathfrak{G} \text{ ノ任意ノ element ハ } \exp. U \text{ ノ如キモノ有限個ノ} \\ \text{composition トシテ表ハサレル。} \end{cases}$$

定理1カラ

定理2. $\mathfrak{G}$ ガ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ stetig homomorph ナ表現ニナツテヰルトスル。即チ $D(a)$ ガ a ノ連続函数ニシテ

$D(a)D(b)=D(ab)$, $D(e)=E$; e, E ハ $\overline{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{G}$ ノ単位.
然ラバ $\mathfrak{G}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ <u>Lie 表現</u>デアル。

証明. $\mathfrak{G}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ或ル閉ヂタ *Normalteiler* $\overline{N}$ ニヨル剰余群 $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{N}$ ニ *isomorph* デアル。$\overline{\mathfrak{G}}/\overline{N}$ ノ topology ヲ, *Restklassenbildung* ニ於イテ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ open set ノ *Bild* ニナルヤウナモノ、然シテ斯ルモノノミヲ $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{N}$ ノ open set ト名ヅケルコトニスルト明ニ $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{N}$ ハ locally compact 且ツ connected ナ topological group ニナル。且ツ $\mathfrak{G}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{N}$ ニ *stetig isomorph* ニナル。何者, $\mathfrak{G}$ ノ open set ノ *Urbild* in $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{N}$ ハ定義カラ open ニナルカラ。ヨッテ定理1ヲ使ヘバヨイ。

注意. 定理2ハ $\overline{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{G}$ 共ニ matrix 群ノトキニハ J. von Neumann (M. Z.) ニヨリ $\overline{\mathfrak{G}}$ ガ Lie 群 $\mathfrak{G}$ ガ matrix 群ノトキニハ van der Waerden (M. Z. 36) ニヨリ、又 $\overline{\mathfrak{G}}$ ガ real number ノ additive group ノトキニハ南雲氏ニヨリ $\mathfrak{G}$ ノ<u>次元假定</u>ナシニ証明サレタ (本紙談話 203)。

定理1ノ証明. 第一段. $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{R}$ ニ einbetten シテルカラ arbitrarily small cyclic sub group ヲ含マナイ (本紙談話 298)、従ッテ $\overline{\mathfrak{G}}$ モ亦 arbitrarily small cyclic subgroup ヲ含マナイ。今 $V(e)$ ヲバ $V(e)=V(e)^{-1}$ ($V(e)$ ノアラユル要素ノ inverse

ヲ $\nabla(e)^{-1}$ デ表ハス)，$\nabla(e)$ ノ closure $\overline{\nabla}(e)$ ガ compact ナ様ナ e ノ近傍トスル。然モ $\overline{\nabla}(e)$ ノ Bild ハ全テ $|D-E|<1$ ヲ満足スルヤウニ $\nabla(e)$ ヲ小サクトッテオク。

今 $\nabla_1(e)=\nabla_1(e)^{-1}$，$\nabla_1(e)^2 \subseteqq \nabla(e)$ ナル如キ e ノ近傍ヲトル。$\overline{\mathfrak{G}}$ ハ arbitrarily small cyclic subgroup ヲ含マヌカラ $a_n \in \overline{\mathfrak{G}}$，$a_n \neq e$，$a_n \longrightarrow e$ トスルト $a_n^p \in \overline{\nabla}_1(e)$; $p=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots, \pm(m_n-1)$ ＝シテ $a_n^{m_n} \in \overline{\nabla}_1(e)$，$a_n^{\pm m_n} \in \nabla(e)$ ナル如キ positive integer m_n ノ Folge アリ。ヨッテ $\overline{\nabla}(e)$ compact ダカラ $a_{n_i}^{m_{n_i}} \longrightarrow a \neq e$ ($\overline{\nabla}_1(e)$ ＝含マレヌカラ)，$a \in \overline{\nabla}(e)$ ナル如キ Teilfolge $a_{n_i}^{m_{n_i}}$ アリ。

第二段．上ノ如キ a ヲ含ム one-parameter ノ subgroup of $\overline{\mathfrak{G}}$ アリ。以下其ノ証明．

$2p_i-1 < m_{n_i} \leqq 2p_i$ ナル如キ正 integer p_i ヲ定メルト $a_{n_i}^{p_i}$ ハ convergent デアル。若シ然ラズトスレバ $\lim a_{n_i'}^{p_i'} = a' \neq a'' = \lim a_{n_i''}^{p_i''}$ ナル如キ二ツノ Teilfolge アリ。$a', a'', a'^2, a'' \in \overline{\nabla}(e)$ 且ツ $a' \neq a''$，$a'^2 = a''^2$ ダカラ $D(a') \neq D(a'')$，$D(a')^2 = D(a'')^2$。$\log$ ヲトルト $2 \log D(a') = 2 \log D(a'')$ ヨッテ $D(a') = D(a'')$ トナッテ矛盾デアル。ヨッテ $a_{n_i}^{p_i}$ ハ convergent デアルカラ此ノ limes ヲ $a^{\frac{1}{2}}$ トヲクト $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$．同様＝シテ順次 $a^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}, \cdots\cdots, a^{\frac{1}{2^n}}$ ガ定義サレ明カ

$=\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^m}=a^{\frac{1}{2^{n-m}}}$, $m\leqq n$ デアル。 $a^{\frac{1}{2^0}}=a$.

又 $a^{\frac{1}{2^n}}\to e$ デアル。何者、然ラズンバ或ル Teilfolge

$a^{\frac{1}{2^{n_i}}}$ ハ $a^{\frac{1}{2^{n_i}}}\to d\neq e$, $a^{\frac{m}{2^{n_i}}}\in\overline{V}(e)$, $m\leqq 2^{n_i}$,

ヲ満足スルカラ $D(a^{\frac{1}{2^{n_i}}})\to D(d)\neq E$, $\left|D(a^{\frac{1}{2^{n_i}}})^m-E\right|<1$;

$m=0,1,\text{------},2^{n_i}$, 且ツ $D\left(a^{\frac{1}{2^{n_i}}}\right)^{2^{n_i}}=D(a)\to D(a)$ ヲ満足

スルカラ log ヲトッテ $2^{n_i}\log D\left(a^{\frac{1}{2^{n_i}}}\right)\to\log D(a)\neq 0$

($a\neq e$ ダカラ)。之レカラ $\log D(a^{\frac{1}{2^{n_i}}})\to 0$. 即チ

$\log D(d)=0$ ナル矛盾ヲ得ルカラデアル。ヨツテ

$a^{\frac{1}{2^n}}\to l$ トオクト $l^2=l$. 従ツテ $l=e$.

斯クテ $a^{\frac{m}{2^n}}$ ガ定義サレ明カニ

$$a^{\frac{m}{2^n}}a^{\frac{m'}{2^{n'}}}=a^{\frac{2^{n'}m}{2^{n+n'}}}a^{\frac{2^n m'}{2^{n+n'}}}=a^{\frac{2^{n'}m+2^n m'}{2^{n+n'}}}$$

ガ成立スルカラ continuity ニヨリ a ヲ含ム one-parameter subgroup ノ存在ガワカル。

$$\begin{cases} a(t)\,a(s)=a(t+s),\ a(1)=a,\ a(0)=e \\ \lim\limits_{t\to t_0} a(t)=a(t_0) \end{cases}$$

第三段. $D(a(t))=D_t$ トオクト $D_tD_s=D_{t+s}$ 且ツ $\lim\limits_{t\to t_0}D_t=D_{t_0}$ ヨツテ南雲氏ノ定理ニヨリ $D_t=\exp tU$, $U\in R$. U ハ次ノ式ヲ満足スル。

$$D(a_{n_i})^{m_{n_i}}=D\left(a_{n_i}^{m_{n_i}}\right)\to D(a)=D_1=\exp U.$$

ヨッテ $m_{n_i} \log D(a_{n_i}) \longrightarrow U$　即チ $m_{n_i}\{D(a_{n_i})-E\} \to U$

($m_{n_i} \log D(a_{n_i})$ ト $m_{n_i}[D(a_{n_i})-E]$ トハ同時ニ收斂シ其ノ limit 等シイ。本紙談話280参照) 尚一般ニ

$$a\left(\frac{t}{n}\right)^n \longrightarrow a(t),\quad n\left\{D\left(a\left(\frac{t}{n}\right)\right)-E\right\} \longrightarrow tU,$$

$$|t| \leqq 1.$$

第四段. $a(t)$ ノ他ニ $b(t)$ モ $\overline{\mathfrak{g}}$ ノ one-parameter subgroup トシ $b(t) \in \overline{V}(e)$ for $|t| \leqq 1$ トス。

$D(b(t)) = \exp tV$ トヲク。

今 $a\left(\frac{1}{n}\right) b\left(\frac{1}{n}\right) = C_n$ トヲイテ

$$C_n^m \in \overline{V}(e);\ m = 0, \pm 1, \text{------}, \pm m_n;\ m_n \leqq n;$$

$$C_n^{m_n+1} \overline{\in} V(e)$$

ナル如キ正整数 m_n ヲ定メル (但シ $C_n^m \in \overline{V}(e);\ m = 0, \pm 1,$ ------$, \pm n$ ナラバ $m_n = n$ トヲク)。然ラバ $C_n^{m_n} \overline{\in} \overline{V_1}(e)$ デアル。何者、若シ然ラズンバ $V_1(e)^2 \subset V(e)$ ニヨリ $C_n^{m_n+1} \in V(e)$ トナッテ了フ。ヨッテ $C_n^{m_n}$ ノ Teilfolge $C_{n_i}^{m_{n_i}} \longrightarrow d \neq e$. $D(C_{n_i})^{m_{n_i}} \longrightarrow D(d) \neq E$. 上ト同様ニシテ

$$m_{n_i}\left\{D(C_{n_i})^{m_{n_i}} - E\right\} \to \log D(d).$$

即チ $m_{n_i}\left\{D\left(a\left(\frac{1}{n_i}\right)\right) D\left(b\left(\frac{1}{n_i}\right)\right) - E\right\} = m_{n_i}\left\{D\left(a\left(\frac{1}{n_i}\right)\right) - E\right.$

$$\left. + D\left(b\left(\tfrac{1}{n_i}\right)\right) - E + \left[D\left(a\left(\tfrac{1}{n_i}\right)\right) - E\right]\left[D\left(b\left(\tfrac{1}{n_i}\right)\right) - E\right]\right\} \to \log D(d).$$

所が $0 \leqq m_{n_i} \leqq n_i$ ダカラ適當ナ Teilfolge ヲトルト

$\lim \dfrac{m_{n'_i}}{n'_i} \longrightarrow t_0 \leqq 1$. 故ニ

$$\lim_{i'\to\infty} m_{n_{i'}}\left\{D\left(a\left(\frac{1}{n_{i'}}\right)\right)-E\right\}=\lim_{i'\to\infty} m_{n_{i'}}\log D\left(a\left(\frac{1}{n_{i'}}\right)\right)$$

$$=\lim_{i'\to\infty}\log D\left(a\left(\frac{m_{n_{i'}}}{n_{i'}}\right)\right)=\log D(a(t_0))=t_0\mathfrak{U}.$$

ヨツテ $m_{n_{i'}}\log D(C_{n_{i'}})\to t_0(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})$

即チ $D(d)=\exp(t_0(\mathfrak{U}+\mathfrak{V}))$。

然シテ $d\neq e$ ダカラ $D(d)\neq E$ ダカラ $t_0\neq 0$. 斯クテ

第五段. $a_i\in\overline{\mathfrak{g}}$, $a_i\neq e$, $a_i\to e$ ナル如キ Folge $\{a_i\}$ ヲ與ヘレバ $\overline{\mathfrak{g}}$ ノ one-parameter subgroup $a(t)$ 及ビ $\mathfrak{g}$ ノ one-parameter subgroup $D(a(t))=\exp t\mathfrak{U}$ ガ定マル。斯ル $\mathfrak{U}$ ヲ $\mathfrak{g}$ ノ infinitesimal operator ト名ヅケルト斯ル $\mathfrak{U}$ ノ全体ハ real number ヲ係数トスル linear manifold $\mathfrak{T}$ ヲ作リ $\exp\mathfrak{V}\in\mathfrak{g}$, $\mathfrak{V}\in\mathfrak{T}$, 且ツ $\mathfrak{V}$ ガ充分 0 ニ近イト $D(a)=\exp\mathfrak{V}$ ナル $a\in\overline{\mathfrak{g}}$ ハ e ニ近イコトガ分ツタ。

第六段. $\mathfrak{g}$ ノ有限次元ト云フ假定カラ $\mathfrak{T}$ ハ有限コノ一次独立 (real number ヲ係数トシテ) ナ Base $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{U}_k$ ヲモツコトガワカルガ $a\in\overline{\mathfrak{g}}$ ガ充分 e ニ近イナラバ $D(a)=\exp\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}\in\mathfrak{T}$ デアル。ソレニハ本紙談話 291 ノ論法ヲ使ヘバヨイ。即チ

$\mathfrak{T}'$ ヲ $\mathfrak{T}$ ノ element デ $|\mathfrak{U}|\leqq\alpha<1$ ヲ満足スルモノトシ $\mathfrak{g}'$ ヲ $\exp\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}\in\mathfrak{T}'$ ノ全体トスル。$\mathfrak{g}'$ ハ群デハナイガ任意ノ element ト共ニ確カニソノ inverse ヲ含ム Gruppenkeime デアル。

今 $a_i \in \overline{\mathfrak{g}}$, $a_i \longrightarrow e$ トスレバ 充分大キナ i = 對シ $D(a_i) \in \mathfrak{g}'$ デアル。若シ然ラズトスレバ $\mathfrak{g}'$ ガ $\mathfrak{g}$ = 於テ開デテヲルカラ, 各 i = 對シ

$$0 < \eta_i = |D(a_i)T_i - E| \leqq |D(a_i)T - E|; \quad T_i, T \in \mathfrak{g}'$$

ナル如キ η_i, T_i ガ存在セネバナラヌ。然シテ $E \in \mathfrak{g}'$ ダカラ $D(a_i) \longrightarrow E$ = ヨリ $\eta_i \longrightarrow 0$ 従ッテ $T_i \longrightarrow E$ デアル。故ニ $T_i = D(b_i)$ トヲケバ $b_i \longrightarrow e$ 従ッテ $D(a_i)T_i = D(a_i b_i)$ = 於ケル $a_i b_i \longrightarrow e$ 且ツ $a_i b_i \neq e$. ヨッテ第二段ノ論法 = ヨリ或 Teilfolge = 對シ

$$(a_{i'} b_{i'})^{n_{i'}} \longrightarrow d \neq e,$$

$$n_{i'}\{D(a_{i'} b_{i'}) - E\} \longrightarrow \log D(d) \neq 0.$$

従ッテ特 = $n_{i'}\eta_{i'} \longrightarrow \beta \neq 0$

今 $D(b_i) = \exp \mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U}_i \in \mathfrak{T}$ トヲクト $\mathfrak{U}_i \rightarrow 0$ デアル。

$$\left|D(a_{i'}) \exp\left(\mathfrak{U}_{i'} - \frac{1}{n_{i'}} \log D(d)\right) - E\right| \leqq |D(a_{i'})|$$
$$\left|\exp\left(\mathfrak{U}_{i'} - \frac{1}{n_{i'}} \log D(d)\right) - \exp(\mathfrak{U}_{i'}) \exp\left(-\frac{1}{n_{i'}} \log D(d)\right)\right|$$
$$+ \left|D(a_{i'}) \exp \mathfrak{U}_{i'} \exp\left(-\frac{1}{n_{i'}} \log D(d)\right) - E\right|$$

= 於ケル右辺ノ第一項ハ

$$|D(a_{i'})|\, O\left(|\mathfrak{U}_{i'}| \frac{1}{n_{i'}} \log D(d)\right) = o\left(\frac{1}{n_{i'}}\right) = o\left(\eta_{i'}\right)$$

(何者、$\mathfrak{U}_{i'} \rightarrow 0$ = シテ且ツ一般 = $|\exp(A+B) - \exp A \exp B| = O(|A||B|)$ デアルカラ)

第二項ハ

$$\left|\left(E+\frac{1}{n_{i'}}\log D(\alpha)+o\left(\frac{1}{n_{i'}}\right)\right)\left(E-\frac{1}{n_{i'}}\log D(\alpha)+o\left(\frac{1}{n_{i'}}\right)\right)\right|$$

$$=o\left(\frac{1}{n_{i'}}\right)=o\left(\eta_{i'}\right).$$

ヨッテ $\left|D(a_{i'})\exp\left(U_{i'}-\frac{1}{n_{i'}}\log D(\alpha)\right)-E\right|=o\left(\eta_{i'}\right)$ デアル。所ガ $U_{i'}$, $\frac{1}{n_{i'}}\log D(\alpha)$ ハ $\mathfrak{T}$ ノ element デ且ツ i' ガ充分大キイト明ニ $\left|U_{i'}-\frac{1}{n_{i'}}\log D(\alpha)\right|\leqq\alpha$ ダカラ $T_{i'}$ ノ撰ミ方ニ矛盾スル。ヨッテ i ガ充分大キイト $D(a_i)\in\mathfrak{g}'$ ナルヲ可シ。

第七段. 定理ノ最後ノ部分ハ Schrier ノ定理ニヨリ連結ナ $\overline{\mathfrak{g}}$ ノ任意ノ element ハソノ任意ノ e ノ近傍ノ element 有限コノ composition トシテ得ラレルコトカラワカル。

昭和十一年度1月—6月分ノ會費金貳円也
ヲ至急御拂込ミ下サイ。

大阪市北區
大阪帝國大學
理學部數學教室　清水辰次郎

振替口座番號　大阪一七七四三番

（尚前期會費未納ノ方ハ前期會費ヲモ至急御拂込ミ願ヒマス。）

前期會計決算ハ第84號ニ報告シテアリマス。