405. 特殊ナ<u>ガロア</u>体ノ構成ニ就テ(II)

淡中忠郎(東北大)

§3. 前回ノ§2デ残ッタ部分ヲ証明スル。

K_1 ノ *Primideal* ハ次ノ四種類ニ分ケラレル。

A. K_1/k デ非分岐, K_2/K_1 デ分岐

B. K_1/k デ分岐, K_2/K_1 デ非分岐

C. K_1/k デ分岐, K_2/K_1 デ分岐

D. K_1/k デ非分岐, K_2/K_1 デ非分岐

$$\gamma = \mathfrak{P}^{\lambda}\cdot\mathfrak{S},\quad p/\lambda\ (\lambda \neq 0)$$ トスル。

サスレバ（以後 $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$ 等ハ K_1 ノ Primideal）

$$\mathfrak{P} \sim \mathfrak{p},\quad \mathfrak{p} \nmid p$$

$\mathfrak{p}$ ハ Grad 1 デ K_1/k ニ於テ非分岐

$$\zeta_{(p^f)} \equiv 1 \mod \mathfrak{p}$$

ナル $\mathfrak{p}$ ヲエラビ $\dfrac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{P}} = (\alpha)$ ノトキ

$$\gamma' = \gamma\alpha^{\lambda}$$

ナル置換ガ許サレル。

$$\gamma' = \mathfrak{p}^{\lambda}\cdot\mathfrak{S}$$

即チ上ノ様ナ $\mathfrak{p}$ ノ存在ガ示サレレバ p/λ ノヤウナ $\mathfrak{P}$ ヲ除イテ D ノ種類ノ Primideal モシクハ定理 1 ニ於ケルノト同ジ性質ヲモツ Primideal $\mathfrak{p}$ ガハイル様ニスルコトガ出來ル。

(2) 實際ニ上ノ様ナ $\mathfrak{p}$ ガ存在スルコトハ次ノ如クシテ分ル。

先ヅ $\overline{K}_1$（K_1 ノ absoluter Klassenkörper）ト $K_1(e^{\frac{2\pi i}{p^{f+1}}})$ ガ K_1 ヲ Durchschnitt ニ持ツトシテモヨイコトハ K_1 ヲ作ルトキ $R(e^{\frac{2\pi i}{p^{f+1}}}) = R(\zeta_{f+1})/R$ デ voll-verzweigen スル Primideal ガ K_1/k デ非分岐ノ如ク作レルコトカラ明カデアル。$\overline{K}_1\cdot K_1(\zeta_{f+1})$ ノ K_1 ニ對スル Idealklassengruppe ヲ考察スルコトニヨツテ

$$\mathfrak{P} \sim \mathfrak{p},\quad \mathfrak{p} \nmid p$$

$\mathfrak{p}$ ノ Grad 1.

$\mathfrak{p}$ ハ $K_1(\zeta_{f+1})$ デ vollzerfallend

ナル $\mathfrak{p}$ ノ存在ガ出ル。

$$\zeta = \zeta_{f+1}^{p^f}$$

$$\therefore \quad \zeta \underset{(p^f)}{\equiv} 1 \mod \mathfrak{P} \quad (\mathfrak{P}/\mathfrak{p} \text{ in } K_1(\zeta_{f+1}))$$

$\mathfrak{P}$ ハ K_1 ニ對シテ一次

$$\therefore \quad \zeta \underset{(p^f)}{\equiv} 1 \mod \mathfrak{p} \quad \text{in } K_1$$

今度ハ $\gamma = \omega^\lambda \mathfrak{c}$ $\quad p \nmid \lambda$ トスル。ω ハ A 及ビ C ノ何レカノ type デアル。

(3) A ノ type ノモノヲ考ヘル。即チ

$$\gamma = \omega^\lambda \cdot \mathfrak{c}, \quad p \nmid \lambda$$

ω ハ K_1/k デ非分岐

K_1/k ニ於ケル ω ノ Konjugierte ヲ $\omega', \omega'', \cdots\cdots$

$$\gamma = \omega^\lambda \omega'^{\lambda'} \cdots\cdots \cdot \mathfrak{c}$$

$$\gamma^{\sigma-1} = \delta_\sigma^p$$

$\omega' = \omega^\sigma$ トスルト

$$\gamma^\sigma = \omega'^\lambda \omega'^{\sigma\lambda'} \cdots\cdots \mathfrak{c}^\sigma$$

$$\gamma^{\sigma-1} = \omega'^{\lambda-\lambda'} \cdots\cdots = \delta_\sigma^p$$

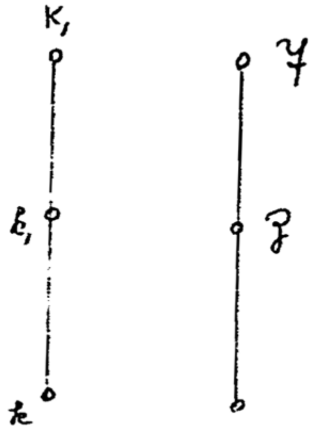
$$\therefore \quad \lambda - \lambda' \equiv 0 \ (p)$$

$$\therefore \quad \gamma = (\omega\omega'\omega''\cdots\cdots)^\lambda \cdot \mathfrak{c}^p$$

ノ形デアル。(コノ $\mathfrak{c}$ ハ前ノ $\mathfrak{c}$ トハ異ナル)

$$\omega_0 = \omega\omega'\omega''\cdots\cdots$$

ト置ク。之ハ基礎体 k ノ Ideal デアル。k_1 ヲ K_1 ノ中デノ $\mathfrak{P}_0$ ノ Zerlegungskörper トスル。K_1/k ニ於テ非分岐ダカラ K_1/k_1 ハ zyklisch デアル。(K_1 ニ對應スル群ガ Trägheitsgruppe $\mathfrak{Y}=1$)



(4) $\bar{k}$ ヲ k ノ絶對類体トスルト

$$k_1\bar{k} \frown K_1 = k_1$$

ナルコトハ $K_1 \frown \bar{k} = k$ ガ分レバ出ル。之ハ p-Gruppe ノ echt ナ Untergruppe ハ Index p ノ Normalteiler ニ含マレルコト (Index p ナラ自然ニ Normalteiler ニナルコトニ注意) カラ K_1 ノ $(p, p, \cdots\cdots p)$ 型ノ最大ナ Unterkörper ガ rein verzweigt ニ作ラレテアレバ充分デアル。後ニ示ス G_h ニ属スル体ノ作リ方デハ實際ソノ様ニ作ッテアル。

k_1 ノ Ideal $\mathfrak{a}_1$ ガ $H(k_1\bar{k}/k_1)$ ニ属スルコトハ Verschiebungssatz ニ依リ $\underset{k_1/k}{N}\mathfrak{a}_1 \sim 1$ ト同ジデアル。
従ッテ k_1 デ

$$\mathfrak{p}_1 \subset H(K_1/k_1)$$

$$\mathfrak{p}_1 \sim \mathfrak{P} \quad \mathrm{mod.}\ H(k_1\bar{k}/k_1)$$

ナル一次ノ $\mathfrak{p}_1$ $(\mathfrak{p}_1 \nmid p)$ ヲトレバ

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{a}_1, \qquad \mathfrak{a}_1 \subset H(k_1\bar{k}/k_1)$$

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{p}_0(\beta) \qquad \mathfrak{p}_0 = \underset{k_1/k}{N}(\mathfrak{p}_1), \quad (\beta) = N_{k_1/k}(\mathfrak{a}_1)$$

コノ β ヲ用ヒテ

$$\gamma' = \gamma \beta^{-\lambda}$$

トスレバ

$$(5) \quad \gamma' = \mathfrak{p}_0^{\lambda} \mathfrak{c}^{p}$$

更ニ $K_1 \frown \bar{k} = k$ ノ代リニ $K_1 \frown \bar{k} \cdot R(\zeta_{f+1}) = k$ カラ出発シテ上ノ証明ヲ吟味スルト $\mathfrak{p}_0$ ハ

$$\underset{(p^f)}{\zeta \equiv 1} \mod \mathfrak{p}_0$$

ノ如クニモトレル。$\mathfrak{p}_0$ ハ $\mathfrak{p}_1$ CH (K_1/k_1) ダカラ K_1 デ vallzufallen シテ居ル. 即チ $\mathfrak{p}_0$ ハ定理 1 ノ(イ)ノ性質ヲモツ。

$\mathfrak{c}$ ノ中ノ Primideal ニハ前ノ p/λ ノ時ノ論法ガアテハマルカラ

$$\gamma' = \gamma \alpha^{p} \cdot \beta$$

ナル変換ノ結果 γ ノ因子ハ

$$\gamma = \mathfrak{p}_0^{\lambda_0} \cdots\cdots \mathfrak{p}^{\lambda} \cdots\cdots$$

$$(p \nmid \lambda_0, \quad p/\lambda)$$

ノ形デ $\mathfrak{p}_0$ ハ(イ)ノ性質ヲ持チ $\mathfrak{p}$ ハ(ロ)ノ性質ヲ持ツカモシクハ $K_1(\sqrt[p]{\gamma})/k$ デ unverzweight デアル。

Unendliche Primstelle ニ関スル條件ハ証明ノ途中カラ満足スル様ニトレルコト明白デアル。

残ル問題ハ定理 1 ヲ $(p, p, \cdots\cdots, p)$ 型ノ群ニツイテ証明スルコトデアル。之レヲ §3 デ述ベル。定理 1 ガ証明出来レバ我々ノ目的ノ定理ハ $R(\zeta)$ ノ上ニ基礎体 k ト $R(\zeta)$

ニ関シテ unabhängig ニ作ッタ K（之ハ可能）ヲ k 迄 verschieben スレバヨイ。

(6) 又前稿デハ未ダ証明ニ確信ガ持テナカッタタメニ述ベテ置カナカッタガ Scholz ノ結果ニ依ルト メターベル体ノ構成ハ與ヘラレタ体ト unabhängig ナ素数ベキ次ノガロア体ノ構成ニ帰セラレルカラ次ノ定理モ得ラレルワケデアル。

（定理） $\mathfrak{G}$ ヲ任意ノ metabelsche Gruppe，ソノ Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ ノ次数ヲ $p_1^{a_1} p_1^{a_2}$ ------ トスレバ $e^{\frac{2\pi i}{p_1}}, e^{\frac{2\pi i}{p_2}}$, ------ ヲ含ム基礎体 k ノ上ニ $\mathfrak{G}$ ヲ群トスル体ガアル。」

$\mathfrak{G}'$ ニ関スル條件ガ k ニ附クコトハ Scholz ノ論文（Heidelberger Berichte (1929)）参照。

基礎体ニ関スルコノ條件ヲ取リ去ルコトハ望マシイコトデスガ（ソレガ可能ナラ Scholz ノ目的ガ達セラレタワケデス） Ring ヲ用ヒル方法ノ缺点トシテ中々取レナイ條件ノ様ニ思ヒマス。