408. 素ナル標數ノ体ノ上ノ多元環ニツイテ. III

中山　　正（阪大）

第1, 第2ノ報告（87号, 384, 88号. 387）ノ結果ヲ更ニ精シクシタイ。例ノ如クKヲ標数pノ体, $\mathfrak{O}$ヲソノ上ノp-Potenzindexノ多元環類トスル. 然ラバ

$\mathfrak{O}$ハ巡回多元体ノ直積デ代表サレ、然モソノ際ソノ各々ノ巡回多元体ハIndexトExponentが相等シク,

且ツ $\mathfrak{a}$ ノ Exponent ガ各々ノ巡回多元体ノ Exponent ノ中ノ最大ナルモノト一致スルヤウニスルコトガ出来ル。マタ更ニ $(K^{p^{-1}}:K)$ ガ有限 p^m ナラバ，コノ際ノ巡回多元体ノ数ヲ高々 m 個ニスルコトガ出来ル。（線ヲ引イタ部分ガ精シクナッタ所デアリマス）。

証明ノタメ先ヅ K カラ適當ニ元ノ集合 $\{a_\tau\}$ ヲ取出シ（番号ヲツケタガ可附番個トイフワケデハナイ），ソノ中カラ任意ノ有限個例ヘバ s 個取リ出シタトキ

$$K(\sqrt[p]{a_{\tau_1}},\ \sqrt[p]{a_{\tau_2}},\ \cdots\cdots,\ \sqrt[p]{a_{\tau_s}})$$

ガ常ニ K ニ對シ p^s 次デアル様ニスル。

コヽニ"注意"サレタイノハコウシテオケバ，例ヘバ K' ヲ K ニ a_1 以外ノ $a_\tau\ (\tau \neq 1)$ ノ p 中乗根ヲイクツカ添加シタ体トシタトキ a_1 ノアル p 中乗根ガ K' ニ對スル次數ハ K ニ対スルソレニ相等シイトイフコトデアル。

上ノ定理ヲ証明スルニハ $\mathfrak{a}$ ガ

$$\left\{\begin{array}{l} D_1 \times D_2 \times \cdots\cdots \times D_t\ ;\quad D_i = (a_{\tau_i}, Z_i, S_i), \\ \text{但シ } D_i \text{ ハソノ Index ト Exponent ガ相等シイ様} \\ \text{ナ巡回多元体デアリ，ソノ Exponent ノ最高ノモノ} \\ \text{ガ } \mathfrak{a} \text{ ノソレニ等シイ。マタ } a_{\tau_i} \text{ ハ上ノ } \{a_\tau\} \text{ ノ} \\ \text{中ノ元デアリ，} i \neq j \text{ ナラバ } a_{\tau_i} \neq a_{\tau_j}. \end{array}\right.$$

ナル如キ直積ガ代表サレルコトヲ云ヘバヨイ。

$\mathfrak{a}$ ノ Exponent ヲ p^e トスル。$e=1$ ノトキニハコノコトハ報告 II. ノ証明カラ容易ニワカル。Induktion ニヨルタメ p^e ヨリ低イ Exponent ノモノニハ主張ガスデ

ニ成立スルトシヨウ。

先ヅ上ノ"注意"カラ第一ノ報告(384)ノ10—11頁ニ於イテ α_1 ノ中デ $K(\alpha_2, \text{--------}, \alpha_t)$ ニ含マレル最低ノモノヲ $\bar{a}$, K ニフクマレル最低ノモノヲ a, ト区別シタノハ無駄ナ(且ツ結果ヲ悪クスル)手数デアツタ、始メカラ $\alpha_1, \alpha_2, \text{-------}$ トシテ相異ナル a_τ ノ p 巾乗根ヲトツテオキサヘスレバ $\bar{a}$ ガソノマヽ a ニナツタワケデアル。コノ注意ト II ノ証明トカラ容易ニワカル如ク $\mathfrak{A}$ ハトモカク

$$\begin{cases} A_1 \times A_2 \times \text{-------} \times A_l ; \quad A_i = (a_{\tau_i}, Z_i, S_i), \\ \text{コヽニ } Z_i \text{ ハ高々 } p^e \text{ 次ノ巡回拡大デアリ，マタ } i \neq j \\ \text{ナラバ } a_{\tau_i} \neq a_{\tau_j} \end{cases}$$

ナル直積デアラハサレル。(p^e ハ $\mathfrak{A}$ ノ Exponent. コノ Z_i ノ従ツテ A_i ノ次数ヲ高々 p^e ニナシ得タノガ上ノ注意ノ結果デアル!)

A_i ノ次数ガ高々 p^e デアルカラ Exponent モ然リ. A_i ノ中ニハ Exponent ガ p^e ナルモノガイクツカアル. ソレヲ例ヘバ $A_1, A_2, \text{-------}, A_k$ トシ $(1 \leqq k \leqq l)$ 他ハ Exponent ガ實際 p^e ヨリ小トスル。

$A_1, \text{-------}, A_k$ ノ次数ガ高々 p^e デ Exponent ガ p^e デアルカラ，次数モ Index モ p^e デ多元体デナケレバナラナイ。

更ニ残リノ $A_{k+1} \times \text{-------} \times A_l$ ハ Exponent ガ p^e ヨリ小ナノダカラ我々ノ假定カラ

$$\left\{\begin{array}{l} A_{k+1}\times\cdots\cdots\times A_l\sim B_1\times B_2\times\cdots\cdots\times B_h, \\ \text{但シ } B_j \text{ ハ } B_j=(a_{\sigma_j},\ Z'_j,\ S'_j) \text{ ナル形ノ多元} \\ \text{体デ然モソノ Index ハ Exponent ニ等シク，ソ} \\ \text{ノ中最高ノモノガ直積自身ノソレ } (<p^e) \text{ ニ等シイ、} \\ \text{マタ勿論 } a_{\sigma_j} \text{ ハ } \{a_\tau\} \text{ ノ中カラ取出サレテ居リ，} \\ j\neq i \text{ ナラバ } a_{\sigma_j}\neq a_{\sigma_i}. \end{array}\right.$$

トナシ得ル。

而シテコノ B_j ニ使ッタ a_{σ_j} ノ中デ，上ノ $A_1,\cdots\cdots,A_k$ ニツタッタ $a_{\tau_1},\cdots\cdots\cdots,a_{\tau_k}$ ノドレカト一致スルモノヲ例ヘバ $a_{\sigma_1},\ a_{\sigma_2},\cdots\cdots\cdots,a_{\sigma_g}$ デアルトシテ差支ヘナイ $(0\leqq g\leqq h,\ k)$，更ニ $a_{\tau_1}=a_{\sigma_1},\cdots\cdots\cdots,a_{\tau_g}=a_{\sigma_g}$ デアルトシテモカマハナイ。コレ等ノ $j=1,2,\cdots\cdots\cdots,g$ ニ對シテ $A_j\times B_j$ ヲ考ヘル。A_j ノ Exponent ハ p^e，B_j ノソレハソレヨリ小．依ッテ積ノソレハ丁度 p^e デアル。

然ルニ $K(a_{\tau_j}$ ノ p^e 乗根$)$ ナル体ハ両因子ノ分解体ダカラ直積ノソレデアル。ヨッテ Exponent ガ p^e ナルコトヲ考ヘレバ Index $=$ Exponent $=p^e$ ナルコトガワカル、マタ II ノ補助定理カラソノ類ハ

$$A_j\times B_j\sim(a_{\tau_j},\ Z_j^*,\ S_j^*)$$

デ表ハサレル、コヽニ $(a_{\tau_j},\ Z_j^*,\ S_j^*)$ ハ Index モ Exponent モ p^e ナル巡回<u>多元体</u>デアル、コレヲ A_j^* トオク。

然ラバモトノ類 $\mathfrak{A}$ ハ

$$A_1^* \times \cdots\cdots \times A_g^* \times A_{g+1} \times \cdots\cdots \times A_k \times B_{g+1} \times \cdots \times B_k$$

ナル直積デ表ハサレル、然モコノ表ハシ方ガ我々ノ要求ヲ充スコトハ上ノ作リ方カラ容易ニワカル。

依ツテ定理ガ Induktion デ一般ニ成立スル。