410. 等積変換ニ就イテ

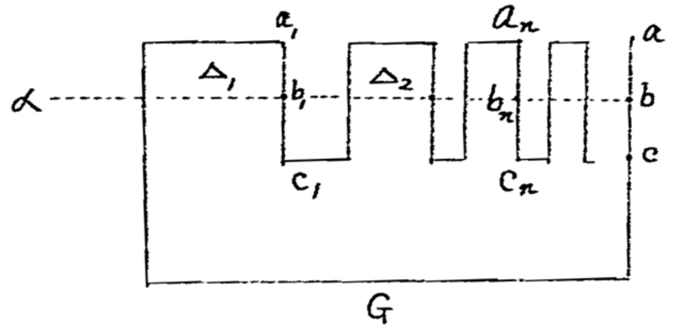
寺阪英孝（阪大）

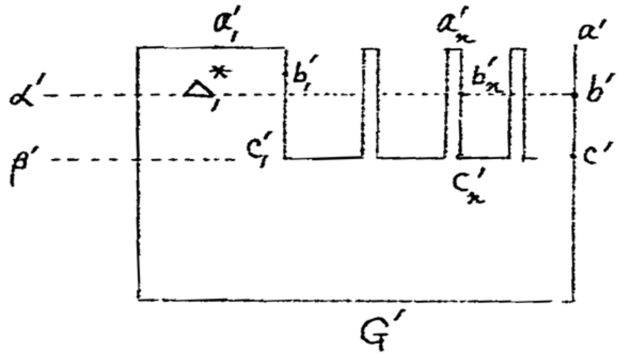
別ニ目新ラシイ問題デモアリマセンガ、諸賢ノ御教示ヲアホギ度イト思ヒマスノデ本紙ヲ拝借シマス。

ユークリッドノ R^n 空間内ノ二ツノ領域 G, G' 間（又ハソノ閉包 $\overline{G}, \overline{G'}$ 間）ニ等型変換（*homöomorphe Abb.*）T ガアッテ，T ニヨリ G 内ノ凡テノ開（又ハ閉）集合 M ガ G' 内ノ M ト等積ナ集合 M' ニ對應スルトキ，T ヲ等積変換トイヒマスト，問題ハ (1) G, G' ガ等型（*homöomorph*）デ且ツ等積ナラバ斯カル T ガ存在スルカ、(2) G, G' ノ境界

デノ對應ガ指定サレタトキニモ省カルゝTガ存在スルカ、ト云フノデス。平面ノ場合或ハコレヲ拡張シテ曲面ノ場合ハ問題ガ容易ニナリマスガ，三次以上ノ場合ハ判リ兼ネマスノデ，御教示願ヒタイト思フノデス。コゝデハ兎モ角平面ノ場合ヲ考ヘルコトニ致シマス。

§1. $\boxed{\text{定理1}}$ 面分ガ等積デアッテモ等積的（等積変換ガ存在）トハ限ラヌ。





圖ノヨウナ $\overline{ac}$, $\overline{a'c'}$ ノミガ nicht erreichbar ナ境界線デアル面分 G, G' ヲ考ヘル。G内デα直線ヨリ上ノ小面分ヲ $\Delta_1, \Delta_2, \cdots\cdots, \Delta_n, \cdots\cdots$ トシ，G'内デハ β' 直線以上ノ小面分ヲ $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \cdots\cdots \Delta_n^*, \cdots\cdots$

且 $A_n = \Delta_n + \Delta_{n+1} + \cdots\cdots$

$$A_n^* = \Delta_n^* + \Delta_{n+1}^* + \cdots\cdots$$

トオイタ時，ソノ面積ノ比ガ $\dfrac{|A_n^*|}{|A_n|} \longrightarrow 0,\ n \longrightarrow \infty$ トナルヨウニシテオク。

Tヲ $\overline{G} \longrightarrow \overline{G'}$ ナル等型変換トスレバ $a_n \longrightarrow a,\ b_n \longrightarrow b,\ c_n \longrightarrow c$ ノ如キ点列 a_n, b_n, c_n ニ對スル a'_n, b'_n, c'_n ハ

$a_n' \longrightarrow a'$, $b_n' \longrightarrow b$, $c_n' \longrightarrow c$トナリ, nガ十分大ナラバ$(n \geqq N)$ $\overline{a_n' b_n'}$ナル線分ハ大体α'直線ノ上部ニ來テ了フ。ヨッテ $\Delta_n (n \geqq N)$ノ寫像Δ_n'ハα'直線ノ大体上部ニ來、従ッテ

$$\frac{|A_n^*|}{|A_n|} \longrightarrow 0 \text{ カラ } \frac{|A_n'|}{|A_n|} \longrightarrow 0$$

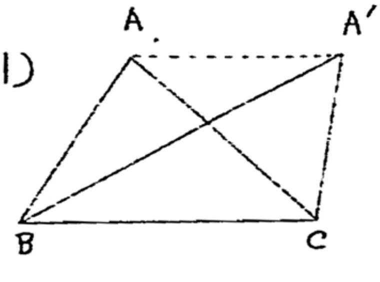
トナル ($A_n' = \Delta_n' + \Delta_{n+1}' + \cdots\cdots$) ($A_n^*$ガ同ジ$n$ノ$A_n'$ヲ含ムワケデハナイガ, nガ十分大ナラバ, アルmニツキ$A_n' \subset A_m^*$。ソレ以後ハ$A_{n+p}' \subset A_{m+p}^*$トナル)。ヨッテTハ等積的デハアリ得ナイ。

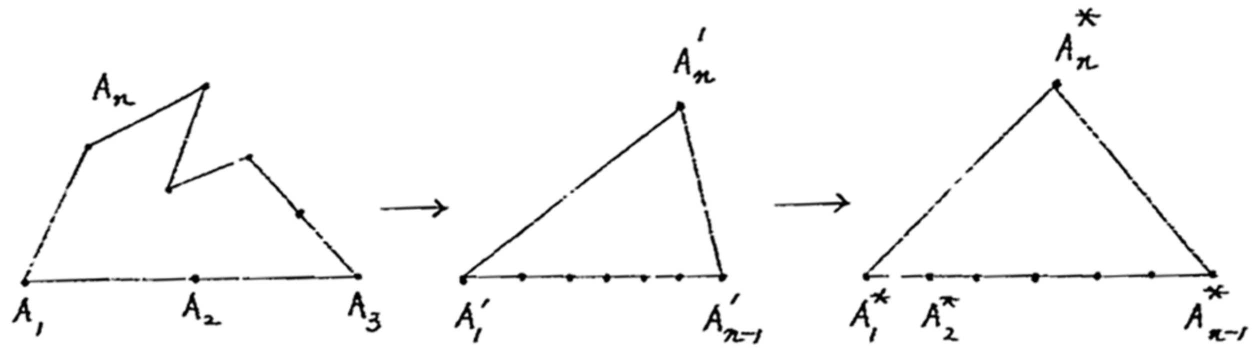
§2. $\boxed{\text{定理2}}$ 測度0ノJordan曲線デ囲マレタ面分ガ等積ナラバJordan曲線上ノ對應(勿論等型的)ヲ指定シテモ等積変換ヲ造リ得ル。

コノ証明ハ二通アッテ、一ツハ次ノ補助定理ヲ用ヰル。

$\boxed{\text{補助定理}}$ 一双ノ多角形ガ等辺, 等積ナラバ, ソノ各辺ガaffinニ對辺スルヤウナ等積変換ガ造レル。(多角形ハ凹デモヨイ。)

得ラレル等積変換ハstückweise = affinニ出來ル。コノ証明ハ圖ニ示シタ初等等積変換 ($AA' \parallel BC \longrightarrow |\triangle ABC| = |\triangle A'BC|$) ヲ有限回運用スレバヨイ。與ヘラレタ多角形カラ順々ニ初等変換ヲ適用シテ等積ナ三角形ヲ造リ、コレヲ更ニ標準型化スル。(略図参照。標準型デハ$A_1^* A_2^* = A_2^* A_3^* = \cdots\cdots = 1$)

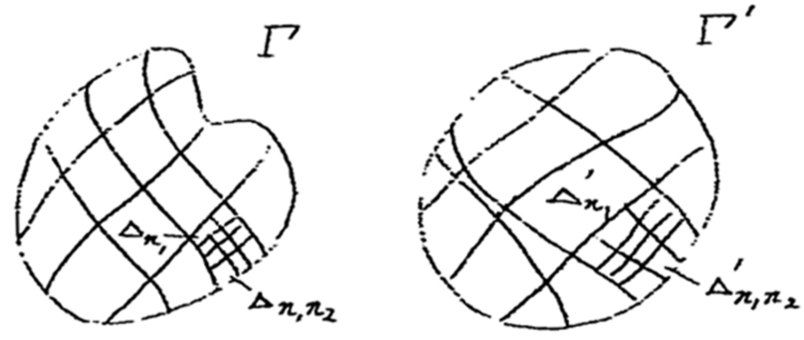




定理2ヲ証明スルニハ Jordan 曲線ノ内部カラコレヲ多角形デ接近セシメ，標準型（例ヘバ正方形）ノ内部ニ順ニ寫像シテユケバヨイ。

定理2ノ別証ハ荒マシノ所次ノヨウニスル。

測度0ノ Jordan 曲線Γ, Γ'デ囲マレタ面分ガ等積デアルトシ，Γ, Γ'上ノ等型對應ヲ指定シテオク。



(1) Γノ内部ヲ十分細カク *Polygonzug* デワケル。Γ'ノ内部モ *Polygonzug* デワケテ（コノ分ケ方ハ *Zellenkomplex* ト考ヘテ両者ガ *isomorph* ニ對應シタルヨウニシテ置ク）Γノ細面分ト對應サスベキモノヲ等積ニシテオク。$(|\Delta_{n_1}|=|\Delta'_{n_1}|)$

(2) 次ニΓ'ノ各Δ'_{n_1}ヲ十分細カクワケル。Γモコレニ應ジテ細分シ、對應スベキモノノ面積ヲ等シクスル。$|\Delta_{n_1 n_2}|=|\Delta'_{n_1 n_2}|$.

(3) 次ニΓノΔ_{n_1,n_2}ヲ細分シ，次ニ又Γ'ノ細面分ヲ細分シ，順繰リニ同様ノ作図ヲスル。

網分ト網面分ノ對應ヲ *isomorph* ニマレバ最後ニ得ラレル $\prod_{K=1}^{\infty}\bar{\Delta}_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_K} \rightleftarrows \prod_{K=1}^{\infty}\bar{\Delta}_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_K}$ ナル對應ニヨリ $\Gamma\,\Gamma'$ 面分間ノ一對一連続即チ等型的ナ寫像ガ造レルシ，コレハ又作図ニヨッテ等積変換ニモナル。

$\boxed{\text{補足}}$ Jordan 曲線 Γ, Γ' ノ測度ハ 0 デナクテモ等シケレバ等積変換ガツクレルケレドモ，Γ, Γ' 上デノ對應ハ Teilbogen ノ測度ガ一致スルヨウニ指定シテオカナケレバナラナイ。

§3. 面分ガ単一連結デナクテモ，無限次連結デアッテモ，境界点ガ凡テ *erreichbar* デアリ，従ッテ有限個ノ Jordan 曲線（特ニ多角形）デ囲マレタ有限連結ノ面分デ一様ニ接近出來ル場合ニハ，境界ノ測度ガ 0 デアルコトト，面分ガ等積ナルコトトカラ，等積変換ノ存在ガ証明サレル。ソレニハ §2 ノ定理、或ハ特ニ補助定理ヲ用ヒレバヨロシイ。

§4. 次ニ等型ナ曲面ガ更ニ等積ナラバ等積変換ガ存在スルカト云フノデアルガ、先ヅ最簡ナ場合トシテ曲面 F ガ閉デタ円盤 K ト等型ナ場合ヲ考ヘル。$K \rightleftarrows F$ ナル對應ヲ f トスルト，K 内ノ開或ハ閉集合 $O \subset K$ ニ對シ f ニヨッテ F 上ニ對應スル部分ノ面積（*Lebesgue* デ測ル）ヲ $\mu(O)$ トスレバ，μ ハ f ニヨッテ定マッタ加法函数デアル。

ソコデ今、F ヲ等積ニ寫像シヨウトスル平面上ノ面分——例ヘバ面積ガ F ノソレニヒトシイヨウナ円 K′トスル——

ヲ考ヘ，K′ = K ヲ等型的ニ寫像シ，O⊂K ニ對スル K′ 内ノ面分ヲ O′ トシタトキ O′ ノ面積ガ $|O'| = \mu(O)$ ノヨウニ出來レバ，コレデ K′ ト F トノ間ニ等積変換ガ附イタコトニナル。

コノ要求ヲ充タス変換 $K \longrightarrow K'$ ヲツクルニハ定理2ノ別証ノ方法ヲ用ヒ，先ヅ K ヲ多角形（又ハ Jordan 曲線）ニヨリ細カク Zellen ニワケテ置キ，K′ ヲ同様ニ細カクキッタモノニ Zellenkomplex ノ對應トシテ isomorph ニ對應セシメ，且ツ K ノ Zelle k_n（面分或ハソノ Seite）ニ對スル K′ ノ Zelle ヲ k'_n トシタトキ $|k'_n| = \mu(k_n)$ ナルヨウニシテ置ク。次ニ K′ ノ Zellenkomplex ヲ細分シテソノ各 Zelle ノ直徑ヲ十分小ニナシ，K ヲ細分シタモノニ上述ノヨウニ isomorph ニ對應サセル。コレヲ交互ニ繰リ返シテユケバ結局 K, K′ 間ニ所要ノ對應ガエラレルカラ $K' \longrightarrow K \longrightarrow F$ ナル對應ニヨリ K′ ト F トハ等積ニ對應スルコトトナル。

單一連結ノ閉曲面ヲ高々 abzählbar 加ヘタモノデハ同様ノコトガ云ヘルカラ、特ニ

定理3 Geschlecht p ノ等積ナ Jordan Flächen ハ互ニ等積的（等積変換存在）デアル。

平面ノ場合ニ面分ガ等積的デアルタメノ必十條件、R^n ($n \geq 3$) ノ場合ハ未解決デス。R^n ノ Gebiet ヲ Polyeder デ接近セシメルコトガ平面ノ場合ノヤウニハ

ツキリ判レバヨイノデスが。