412. 組合函數方程式ニ就イテ(II)

(所謂 Vektor-Raum ノ一ツノ Charakterisierung ニツイテ)

北川敏男(阪大)

§1. B-Verknüpf. 並ビニ $\overset{*}{\mathrm{B}}$-Verknüpf. ノ導入

ニツノ集合 $\mathfrak{M}$ ト $\mathfrak{K}$ トガアリ、$\mathfrak{M}$ ノ元ヲ $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{K}$ ノ元ヲ α デ表ハストキ $\{\mathfrak{s}_n\}$, $\{\alpha_n\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ナル Folgen ニ對シテ

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{s}_1 & \mathfrak{s}_2 \cdots\cdots \mathfrak{s}_n \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \cdots\cdots \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ハ又 $\mathfrak{M}$ ノ一意ニ決ツタ元ヲ表ハシ，次ノ諸性質ヲモツテキルトスル。

(I) $\mathfrak{M}$ ニハ一定ノ元 Θ ガアツテ (1) ニ現ハレル $\mathfrak{s}_n$ ノウチ，Θ ト一致シナイモノハ高々有限個デアル。

(II) $\mathfrak{s}_n=\Theta$ デアレバ，$\{\mathfrak{s}_k\}$ $(k\neq n)$[1], $\{\alpha_k\}$, 並ビニ α'_n ヲ如何ニトルトモ常ニ

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{s}_1 & \mathfrak{s}_2 \cdots\cdots \mathfrak{s}_{n-1} & \Theta & \mathfrak{s}_{n+1} \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathfrak{s}_1 & \mathfrak{s}_2 \cdots\cdots \mathfrak{s}_{n-1} & \Theta & \mathfrak{s}_{n+1} \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_{n-1} & \alpha'_n & \alpha_{n+1} \cdots\cdots \end{bmatrix} \cdots\cdots (2)$$

ナル關係ガ成立スル。

---

(1) $\{\mathfrak{s}_k\}$ $(k\neq n)$ ノ意味ハ $\mathfrak{s}_n$ ヲ除イテハ，知ラレテキルトイフ意味デアル。

(III) 任意ノ $\{\xi_k\}$ $(k \neq n)$ 並ニ $\{\alpha_k\}$ ニ對シテ

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \cdots\cdots & \xi_{n-1} & \xi_n & \xi_{n+1} \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots & \alpha_{n-1} & 0 & \alpha_{n+1} \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \cdots\cdots & \xi_{n-1} & \Theta & \xi_{n+1} \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} \cdots\cdots \end{bmatrix} \cdots\cdots (3)$$

トナル如キ $\mathfrak{R}$ ノ元ガ一ツ而シテ唯一ツ存在スル。コレヲ Θ デ表ハス。

(IV) 任意ノ $\{\xi_n\}$ ニ對シテ

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \cdots\cdots & \xi_n \cdots\cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots & 0 \cdots\cdots \end{bmatrix} = \Theta \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(V) $\xi_n \neq \Theta$ ナラバ, ξ, $\{\xi_k\}$ $(k \neq n)$ 及ビ $\{\alpha_k\}$ $(k \neq n)$ ヲ如何ニ與フルトモ

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \cdots\cdots & \xi_{n-1} & \xi_n & \xi_{n+1} \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} \cdots\cdots \end{bmatrix} = \xi \cdots\cdots (5)$$

トナル如キ α ハ一ツ而シテ唯一ツ存在スル。

(VI) $\alpha_n \neq 0$ ナラバ, ξ, $\{\xi_k\}$ $(k \neq n)$ 及ビ $\{\alpha_k\}$ $(k \neq n)$ ヲ如何ニ與フルトモ

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \cdots\cdots & \xi_{n-1} & \xi_n & \xi_{n+1} \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} \cdots\cdots \end{bmatrix} = \xi \cdots\cdots (6)$$

ナル如キ ξ_n ハ一ツ而シテ唯一ツ存在スル。

(VII) 任意ノ *Folge* $\{\xi_n\}$ ニ對シテ

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \cdots\cdots & \xi_{n-1} & \xi_n & \xi_{n+1} \cdots\cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots & 0 & e & 0 \cdots\cdots \end{bmatrix} = \xi_n \cdots\cdots (7)$$

ナル如キ元 e カ存在スル。

以上ノ諸性質ヲ有スルトキ (1) ヲ B-*Verknüpfung* ト稱シ $B(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$ デ表ハス。[1] 特ニ

(VIII) $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}, \quad \Theta = 0$

且ツ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots\cdots 0 & e & 0 \cdots\cdots\cdots \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots \beta_{n-1} & \beta_n & \beta_{n+1} \cdots\cdots\cdots \end{bmatrix} = \beta_n \quad \cdots\cdots (8)$$

ナル元 e ガ存在スル。

コノ條件ガ加ルトキ (1) ヲ B^*-*Verknüpfung* トイヒ, $B^*(\mathfrak{M})$ デ示ス。而シテ *runde Klammer* ヲ用ヰルコトニスル。

假定(I), $n > m$ ナルトキ, 常ニ $\varsigma_n = \Theta$ ナル如キ m ガアリ、ソノトキ假定(II)ニヨリ, $\alpha_n\ (n > m)$ ニハ實質上無関係ニナルカラ、(1) ヲ

$$\begin{pmatrix} \varsigma_1 & \varsigma_2 \cdots\cdots \varsigma_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \end{pmatrix}_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

デ表ハスコトニシヨウ。

§2. *Mischungregel.*

$B(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$ ガ次ノ性質ヲモツトスル。[2]

---

(1) 以下ノ議論ガ正シケレバ, *Mischregel* (§2) ノ假定ノ下ニ於イテハ, (1) ハ言ヘバ *Bilinear Form* (?) ノヤウナモノデアルト言ヒ得ヤウ。ソコデ頭文字ノ B ヲトツテ、假リニ斯ク名付ケルコトニシタ。

(2) ς ガ $\mathfrak{M}$ ノ任意ノ元, α, β ガ $\mathfrak{K}$ ノ任意ノ元ニ対シテ成立スルトイフ意味デアル。

$$(\mathrm{M})\quad \left[\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \cdots\cdots & \zeta_n \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \cdots\cdots & \alpha_{1,n} \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \cdots\cdots & \zeta_n \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,1} \cdots\cdots & \alpha_{2,n} \end{bmatrix}_n \cdots\cdots \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \cdots\cdots & \zeta_n \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} \cdots\cdots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix}_n \atop \beta_1 \qquad\qquad \beta_2 \qquad \cdots\cdots \qquad \beta_n \right]_n$$

$$= \left[\zeta_1 \qquad\qquad \zeta_2 \qquad \cdots\cdots \qquad \zeta_n \atop \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} \cdots\cdots & \alpha_{n,1} \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots & \beta_n \end{pmatrix}_n \begin{pmatrix} \alpha_{2,1} \cdots\cdots & \alpha_{2,n} \\ \beta_1 \cdots\cdots & \beta_n \end{pmatrix}_n \cdots\cdots \begin{pmatrix} \alpha_{n,1} \cdots\cdots & \alpha_{n,n} \\ \beta_1 \cdots\cdots & \beta_n \end{pmatrix}_n \right]_n$$

コレヲ Mischregel ト稱スル。

定理 I. Mischungregel ヲ有スル $B(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$, $B^*(\mathfrak{K})$ ニ對シテ次ノ事實ガ成リ立ツ。

1°. $B^*(K)$ ニ於イテハ，（Multiplikation）Folge $(\alpha\beta)_i$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$ 並ビニ（Addtion）$\alpha+\beta$ ナル Composition ガ定義サレテ

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots & \alpha_n \cdots\cdots \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots & \beta_n \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1\beta_1)_1 + (\alpha_2\beta_2)_2 + \cdots\cdots + (\alpha_n\beta_n)_n + \cdots\cdots \quad (11)$$

トシテ表ハサレル。コヽニ、之レ等ノ Composition ハ次ノ如キ性質ヲモツ

(i) Composition $(\alpha, \beta)i$ ニ関シテ 0 ヲ除イタ $\mathfrak{K}$ ハ一ツ群ヲツクル。e ガソノ Einheit デアル.

(ii) 任意ノ i, j ニ對シテ

$$((\alpha, \beta)_i\, \gamma)_j = (\alpha\, (\beta\gamma)_j)_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

(iii) $\mathfrak{K}$ ハ Composition $\alpha+\beta$ ニ関シテ一ツノ kommutative gruppe ヲツクル。

0 ガソノ Einheit ニナル.

(iv) $((\alpha+\beta)\gamma)_j = (\alpha\gamma)_j + (\beta\gamma)_j$ ……………… (13)

$(\gamma(\alpha+\beta))_j = (\gamma\alpha)_j + (\gamma\beta)_j$ ……………… (14)

2. $B(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$ ニ對シテハ

$\mathfrak{K}$ ノ任意ノ Element α ト $\mathfrak{M}$ ノ任意ノ Element ξ トノ間ニ、Operation $(\alpha\cdot\xi)_i$ ガ定義サレ $\mathfrak{M}$ ノ元ヲ表ハシ又 $\mathfrak{M}$ ノ元同志ノ間ニ Composition $\xi_1 \oplus \xi_2$ ガ定義サレテ

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots\cdots & \xi_n & \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots & \alpha_n & \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha_1\cdot\xi_1)_1 \oplus (\alpha_2\cdot\xi_2)_2 \oplus \cdots\cdots \oplus (\alpha_n\cdot\xi_n) \oplus \cdots\cdots \quad (15)$$

トシテ表ハサレル。コヽニ、之レ等ノ Operation 乃至 Composition ニハ次ノ如キ性質ガアル。

(v) $(e\cdot\xi)_n = \xi$ (16)

(vi) $(\alpha\cdot\Theta)_n = \Theta$ (17)

(vii) $(0\cdot\xi)_n = \Theta$ (18)

(viii) Composition $\xi_1 \oplus \xi_2$ ニ關シテ $\mathfrak{M}$ ハ一ツノ群ヲ表ハス。

(ix) $\xi_k = \sum_\nu (\alpha_{k,\nu}\cdot\xi^0_\nu)_\nu$ ($k = 1, 2, 3, \cdots\cdots$)

ナルトキニハ

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots\cdots & \xi_n & \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots & \alpha_n & \cdots\cdots \end{bmatrix} = \sum_k \left(\sum_\nu (\alpha_{\nu,k}\alpha_\nu)_\nu \cdot \xi^0_k \right)_k \quad (19)$$ [1]

---

(1) $\sum$ ハ $\mathfrak{K}$ ニ於ケル Addition $\alpha+\beta$ ノ Summe; $\sum$ ハ $\mathfrak{M}$ ニ於ケル Addition $\xi \oplus k$ ノ Summe ナリトスル。

§2. 定理Ⅰノ証明.

補助定理Ⅰ. *Mischungregel* ガ成立スルトキニハ, $B^*(\mathfrak{K})$-*Verknüpfung* ニ對シテモ *Mischregel* ガ成立スル。

証明. 簡單ノタメ $n=2$ ノ場合ニツイテ述ベル。

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}_2 & \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}_2 \\ \delta_1 & \delta_2\end{bmatrix}_2 & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}_2 & \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{bmatrix}_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix}_2 \quad \text{------(20)}$$

$$= \mathcal{S} \ (say)$$

ヲ考ヘル。コレハ, $B(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$ ニ關スル *Mischregel* ニヨリ.

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \delta_1 & \delta_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{pmatrix}_2 \\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \delta_1 & \delta_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{pmatrix}_2 \\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2 \end{bmatrix}_2 \quad \text{------(21)}$$

ニ等シク, 又

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \begin{pmatrix}\delta_1 & \varepsilon_1\\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}\delta_2 & \varepsilon_2\\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2 \end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \begin{pmatrix}\delta_1 & \varepsilon_1\\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}\delta_2 & \varepsilon_2\\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2 \end{pmatrix}_2 \end{bmatrix}_2 \quad \text{------(22)}$$

ニモ等シイ。

茲デ ξ_1, ξ_2 ハ任意デアルカラ、(∇) ニヨリ、

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \begin{pmatrix} \delta_1 & \varepsilon_1 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} \delta_2 & \varepsilon_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}_2 \end{pmatrix}_2 \quad \cdots\cdots (23)$$

ヲ得ル。コレ求ムルB*($\mathfrak{K}$)ニ関スル Mischregel デアル。[1]

吾々ハ便宜上，次ノ記号ヲ導入スル。

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots\cdots & \xi_n \\ e & e & \cdots\cdots & e \end{bmatrix}_n = \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \cdots\cdots \oplus \xi_n \quad \cdots\cdots (24)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots\cdots & \xi_k & \cdots\cdots & \xi_n \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \alpha_k & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}_n = (\alpha_k \cdot \xi_k)_k \quad \cdots\cdots (25)$$

然ルトキ

補助定理 II.

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots\cdots & \xi_k & \cdots\cdots & \xi_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots & \alpha_k & \cdots\cdots & \alpha_n \end{bmatrix}_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cdot \xi_k)_k \quad \cdots\cdots (26)$$

証明．簡単ノタメニ $n=2$ トシテオク。

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}_2 & \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}_2 \\ e & e \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ e & e \end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ e & e \end{pmatrix}_2 \end{bmatrix}_2$$

コレ即チ

$$(\alpha_1 \cdot \xi_1)_1 \oplus (\alpha_2 \cdot \xi_2)_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}_2$$

---

(1) 前稿、組合函数方程式ニ就テ(I)（混合体ノ函数方程式ニツイテ）ニ於イテ、F(X,Y,α)ノ函数方程式カラ、A(x,y,α)ノ函数方程式ヲ導キ出ストキ，コノ方法ニハ依ラナカッタが、コノ方法デモ全ク同様ニシテ出来ル。

ヲ示ス。アトハ Induktion ヲ施セバヨロシイ。

補助定理 III.

$$(\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2) \oplus \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_1 \oplus (\mathfrak{S}_2 \oplus \mathfrak{S}_3) \text{ ---------------- } (27)$$

証明. 定義ニヨリ

$$(\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2) \oplus \mathfrak{S}_3 = \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_1 & \mathfrak{S}_2 & \mathfrak{S}_3 \\ e & e & 0 \end{bmatrix}_3 & \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_1 & \mathfrak{S}_2 & \mathfrak{S}_3 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}_3 & \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_1 & \mathfrak{S}_2 & \mathfrak{S}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_3 \\ e & e & 0 \end{matrix}\right]_3$$

$$\mathfrak{S}_1 \oplus (\mathfrak{S}_2 \oplus \mathfrak{S}_3) = \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_1 & \mathfrak{S}_2 & \mathfrak{S}_3 \\ e & 0 & 0 \end{bmatrix}_3 & \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_1 & \mathfrak{S}_2 & \mathfrak{S}_3 \\ 0 & e & e \end{bmatrix}_3 & \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_1 & \mathfrak{S}_2 & \mathfrak{S}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_3 \\ e & e & \varepsilon \end{matrix}\right]_3$$

然ルニ Mischregel ニヨリ、コノ二ツハ共ニ

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{S}_1 & \mathfrak{S}_2 & \mathfrak{S}_3 \\ e & e & e \end{bmatrix}_3$$

ニ外ナラナイ。

又、次ノ補助定理ヲウル：

補助定理 IV. $\mathfrak{M}$ ハ Composition $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2$ ニ関シテ $\mathfrak{O}$ ヲ Einheit ニシテ gruppe ヲツクル。

以上ノ準備ノモトニ，定理 I ノ証明ニ移ル。上述ノ結果ニヨリ、吾々ハ $B^*(\mathfrak{K})$ ノ Mischregel ヲ研究スレバ充分デアル。$n=2$ ノ場合ヲ考ヘヤウ。乃チ

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 \end{pmatrix}_2$$

ナルトシヤウ。以下

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = (\alpha\,\gamma)_1\,, \quad \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = (\beta\,\delta)_2 \quad \cdots\cdots (28)$$

ナル *Notation* ヲ用キル。$\delta_2, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, 並ビ＝$\gamma_2 = 0$ トオクコトニ由リ

$$((\delta_1\ \alpha_1)_1\ \gamma_1)_1 = (\delta_1\ (\alpha_1\ \gamma_1)_1)_1 \quad \cdots\cdots (29)$$

ヲ得ル。明カニ

$$(e\,\alpha)_1 = (\alpha\,e)_1 = \alpha \quad \cdots\cdots (30)$$

依ッテ O ヲノゾイテ $\mathfrak{K}$ ハ Composition $(\alpha\,\gamma)_1$ ニ関シテ群ヲツクルコトガワカル。$(\alpha\,\beta)_2$ ニ関シテモ同様デアル。

又 $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ トオキテ

$$\left(\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}_2 \gamma_1 \right)_1 = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ (\alpha_1\ \gamma_1)_1 & (\alpha_2\ \gamma_1)_1 \end{pmatrix}_2 \quad \cdots\cdots (31)$$

同様ニシテ

$$\left(\delta_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 \right)_1 = \begin{pmatrix} (\delta_1\ \alpha_1)_1 & (\delta_1\ \beta_1)_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 \quad \cdots\cdots (32)$$

ヲ得ル。$(\alpha\,\beta)_2$ ニ関シテモ同様ノ性質ガアル。

次ニ，$\delta_1 = \gamma_1$，$\delta_2 = \gamma_2$ トオクトキニハ，$\mathfrak{K}$ ニ於ケル *Mischregel* ハ

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 \end{pmatrix}_2 \quad \cdots\cdots (33)$$

以下便宜上，γ_1，γ_2 ヲ *Fixieren* シタトシテ

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}_2 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle_2 \quad \cdots\cdots (34)$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2\end{pmatrix}_2 = (\alpha_1,\ \alpha_2)_2 \quad \text{------------------} (35)$$

トスレバ

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2)_2,\ (\beta_1, \beta_2)_2\rangle_2$$
$$= (\langle\alpha_1, \beta_1\rangle_2,\ \langle\alpha_2, \beta_2\rangle_2)_2 \quad \text{---------} (36)$$

$$(\alpha,\ 0)_2 = \sigma(\alpha), \quad (0,\ \beta)_2 = \tau(\alpha) \quad \text{---------} (37)$$

トオケバ

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2\end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2)_2 = \sigma(\alpha_1) + \sigma(\alpha_2)$$

$$= (\alpha_1 \gamma_1)_1 + (\alpha_2 \gamma_2)_2 \quad \text{-------} (38)$$

コゝニ、$\alpha+\beta$ ハ kommutative gruppe ヲツクリ，0 ガ Einheit ヲナス。(1)

コノ結果ヲ以ッテ $B^*(\mathfrak{K})$ ノ Mischregel ヲ書キ改メルトキニハ

$$(((\delta_1 \alpha_1)_1 + (\delta_2 \alpha_2)_2)\gamma_1)_1 + (((\delta_1 \beta_1)_1 + (\delta_2 \beta_2)_2)\gamma_2)_2$$
$$= (\delta_1((\alpha_1 \gamma_1)_1 + (\beta_1 \gamma_2)_2))_1 + (\delta_2((\alpha_2 \gamma_1)_1 + (\beta_1 \gamma_2)_2))_2$$

$\gamma_2 = 0$ トシテ

$$(((\delta_1 \alpha_1)_1 + (\delta_2 \alpha_2)_2)\gamma_1)_1 = (\delta_1(\alpha_1 \gamma_1)_1)_1 + (\delta_2(\alpha_2 \gamma_1)_1)_2$$

更ニ $\delta_1 = 0$ トシテ

$$((\delta_2 \alpha_2)_2 \gamma_1)_1 = (\delta_2(\alpha_2 \gamma_1)_1)_2$$

従ッテ前式ハ

$$(((\delta_1 \alpha_1)_1 + (\delta_2 \alpha_2)_2)\gamma_1)_1 = ((\delta_1 \alpha_1)_1 \gamma_1)_1 + ((\delta_2 \alpha_2)_2 \gamma_1)_1$$

---

(1) (36) カラ (38) マデヲ導クノニハ、多少ノ工夫ヲ要スルガ今ソレヲ省略シテオク。

$(\delta_1\ \alpha_1)_1$, $(\delta_2\ \alpha_2)_2$ ヲ夫々 α, β トスレバ

$$((\alpha+\beta)\,\gamma_1)_1 = (\alpha\,\gamma_1)_1 + (\beta\,\gamma_1)_2 \quad \text{------------} (40)$$

$(\alpha\beta)_1$, $(\alpha\beta)_2$, $\alpha+\beta$ ニ関スル残リノ諸性質ハ同様ニシテ証明サレル。

$n=2$ ノ場合、定理Iハ証明サレタ。$n>2$ ニツイテハ簡單ナ *Induction* デ証明サレル。

§3. *Vektor-Raum* ノ *Charakterisierung.*

以上ノ結果ヲ利用シテ *Mischregel* ヲ有スル $B(\mathfrak{M},\mathfrak{K})$ ニ更ニ、條件ヲ附加スルコトニヨリ、*Vektor-Raum* ヲ特徴付ヲ試ミタ。先ヅ次ノ *Symmetrie* ノ性質ヲ導入スル：

$$(S)\quad \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \cdots\cdots \xi_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \xi_{m_1} & \xi_{m_2} \cdots\cdots \xi_{m_n} \\ \alpha_{m_1} & \alpha_{m_2} \cdots\cdots \alpha_{m_n} \end{bmatrix}_n \quad \text{--------} (41)$$

コヽニ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots\cdots n \\ m_1 & m_2 \cdots\cdots m_n \end{pmatrix}$ ハ $(1, 2, \cdots\cdots, n)$ ノ任意ノ *Permutation*

然ルトキ次ノ定理ガ成リ立ツ。

定理II. (S) ト *Mischregel* トヲ有スル $B(\mathfrak{M},\mathfrak{K})$ ニ関シテハ，

(i) $\xi_1 \oplus \xi_2 = \xi_2 \oplus \xi_1$

(ii) $(\alpha\cdot\xi)_i = (\alpha\cdot\xi)_j$ （任意ノ i ト j トニ對シテ）

(iii) $(\alpha\beta)_i = (\alpha\beta)_j$ （ 〃 〃 〃 ）

(iv) $\mathfrak{K}$ ハ一ツノ *Körper* ヲツクリ $B^*(\mathfrak{K})$ ハ次ノ如ク表ハサレル。

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots \beta_n \end{pmatrix}_n = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots\cdots + \alpha_n\beta_n \cdots\cdots\cdots\cdots (42)$$

コヽデ(iii)ニヨリ *Multiplikation* ヲ *Suffix* ヲトッテ、示スコトニシテキル。

証明. (i), (ii) ハ，定理 I ト (S) トカラ直チニ得ラレル。(iii) 從ッテ (iv) ヲミルニハ，B($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}$) ニ関シテ(S)ガアレバ *Mischregel* ニヨリ、B*($\mathfrak{K}$) ニ對シテモ (S) ガナリタツ事ニ着目スレバヨロシイ。

次ニ、他ノ條件ヲ導入スル．コレヲ *Kommutativät* ノ條件トイフ。

$$\text{(K)} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \cdots\cdots \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots \beta_n \cdots\cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots \beta_n \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \cdots\cdots \end{pmatrix} \cdots\cdots (43)$$

ガ任意ノ $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ ニ関シテ成立スル。

定理 III. (S), (K) 並ビニ *Mischregel* ヲ有スルトキニハ，定理 II ノ結果ニ加フルニ，$\mathfrak{K}$ ガ *Kommutativ* ナ *Körper* デアルトイフコトヲ得ル。

以上ハ全ク *Kombinatorisch* ナ性質ニシカ訴ヘナカッタガ、コヽニ至ッテ始メテ *Topologisch* ナ性質ヲ導入シヤウ。

$\mathfrak{K}$ ニ関スル *Topologie* ノ假定 (T): $\mathfrak{K}$ ハ *lokal kompakt, zusammenhängend* ニシテ *erste Abzählbarkeitsaxiom* ト *Hausdorff* ノ *Trennbarkeitsaxiom* ガ充タサレテキル *Topologischer Raum* トスル。

$B^*(\mathfrak{K})$ ニ関スル *Stetigkeit* ノ假定 (S_t): $B^*(\mathfrak{K})$ ニ於イテ

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots & \alpha_n \cdots\cdots \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots & \beta_n \cdots\cdots \end{pmatrix} = \gamma$$

ハ各 *Parameter* ニ関シテ *überall stetig* デアリ、更ニ γ ト左辺ノ $\{\alpha_k\}$ 並ビニ $\{\beta_k\}$ $(k \neq n)$ ヲ與ヘルトキ、$\alpha_n \neq 0$ ナラバ、*stetig* ニ解ケル。γ, $\{\alpha_k\}$ $(k \neq n)$ 並ビニ $\{\beta_k\}$ ヲ與ヘテ上ノ関係ヲ満足スル α_n ヲモトメルトキ $\beta_n \neq 0$ ナラバ同様 *stetig* ニ解ケル。

然ルトキ *Pontrjagin*[1] ノ結果ヲ用キテ次ノ結論ニ至ル。

定理 IV. *Mischungregel* ヲ有スル $B(\mathfrak{M}; \mathfrak{K})$ ガ更ニ (S), (T), (S_t) ナル性質ヲ有スレバ, ソレハ *Koeffizienten körper* ヲ実数体, 複素数体, 四元数体トスル *Vektor-Raum* ニナル。

定理 V. *Mischungregel* ヲ有スル $B(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$ ガ更ニ、(S), (T), (S_t) 並ビニ (K) ヲ有スレバ, *Koeff. Körper* ヲ実数体又ハ複素数体トスル *Vektor-Raum* ニナル[2]。

以上ノ諸定理 I — V ノ逆ノ成立スルコトハ容易ニ分ル。

---

(1) Pontrjagin: Über stetige Algebraische Körper. Ann. of Math. II. s. 33 (163—174) (1932)

尚、Pontragin ノ結果ノ應用トシテ次ノ論文ヲ参照セラレタシ。

Kolmogoroff: Zur Begründung der projektiven Geometrie. Ann. of Math. II. s. 33 (175—176) (1932)

定理IV或ハ定理V並ビニソレ等ノ逆ニヨリ、吾々ハ所謂Vektor-RaumノCharakterisierungガ出来タト言ヒ得ルウ。[2] ——Vektor-Raumノ定義ヲ换ヘテオカナイト意味ヲナサナイガ、今ハ、考ヘノ筋道ヲ述ベルノガ主眼ダカラ、事新シク諸條件ヲ列挙スルコトヲヤメヨウ。又、係数ヲ四元数ニマデ拡張シタBanach空間論ガ何處マデ進メラレルカ多少ノ興味ガ残ッテキル——。