

435. Linear Operation = ツイテ (VI)

泉 啓一 (東北大)

北川 敏男 (阪大)

前論文 (V) = 於イテハ週期函数 = 関スル linear operation が translatable = ナルタメノ條件ヲ求メヌ。
 本論文 = 於イテハ $(-\infty, \infty)$ = 於イテ定義サレタ函数ヲ $(-\infty, \infty)$ = 於イテ定義サレタ函数 = 変換スル或ル種ノ operation = ツイテ論シ。合セテ translatable = ナルタメノ條件ヲ求メル。

I. E 及ビ E_1 $\forall (-\infty, \infty)$ = 於イテ定義サレタ函数ノ spaces トシ。各々ノ $f(x) \in E$ ハ任意ノ有限區間デ $|f(x)|^p$ が積分可能ナリ。且ツ各々ノ $g(x) \in E_1$ ハ任意ノ有限區間デ $|g(x)|^q$ が積分可能ナルトスル。

今 $f(x)$ $\forall g(t)$ = カヘル Operation Λ 即チ

$$(1) \quad g(t) = \Lambda(f)$$

ヲ考ヘル。 \mathcal{M}_x 及ビ \mathcal{N}_t \forall 夫々 x -axis 及ビ t -axis 上ノ sets トシ、 \forall ノ l, u, b が共 > 0 ナリ、 g, l, b が共 < 0 トスル。 \mathcal{M}_x 及ビ \mathcal{N}_t ハ、 \mathcal{M}_x 及ビ \mathcal{N}_t が夫々 x 及ビ t 毎ノ translations \forall ヲケル sets \forall 表ハスモノトスル。(従ッテ $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_x, \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_t$ ナル)

$g(t), \mathcal{N}_\mu$ = 属スル殆ントスベテノ点 = 於ケル値ハ、 $\Lambda(f)$ = ヨリ、 \mathcal{M}_μ = 於ケル $f(x)$ ノ値 = ヨツテ定マルモノトスル。乃チ、 $f_1(x) \in E$ が \mathcal{M}_μ = 於イテ $f(x)$ ト一致シテ

居ルナラバ、 \mathcal{M}_{x_1} 外ニ如何ナル値ヲトラウトモ、殆ソドス
 ベテノ $t \in \mathcal{M}_{x_1}$ = 對シテ

$$(2) \quad \Lambda\{t, f_1(x)\} = \Lambda\{t, f(x)\}$$

簡單ノタメニ、 \mathcal{M} 及ビ \mathcal{N} ヲ區間ニトリ

$$(3) \quad \mathcal{M} = (\alpha, \beta) \quad \text{及ビ} \quad \mathcal{N} = (\gamma, \delta)$$

トスル。コノ二區間ガ *Open* デアルカ、*closed* デアルカ
 ハ後ニ必要ニ應ジテ區別スル。

今 $\mathcal{M}_{x_1} \cdot \mathcal{M}_{x_2} \neq \emptyset$, $\mathcal{N}_{x_1} \cdot \mathcal{N}_{x_2} \neq \emptyset$ トスル。然ルトキ
 $\mathcal{M}_{x_1} \cdot \mathcal{N}_{x_2}$ = 於ケル殆ソドスベテノ t = 對シテ、 $g(t)$ ハ
 \mathcal{M}_{x_1} = 於ケル $f(x)$ ノ値及ビ \mathcal{M}_{x_2} = 於ケル $f(x)$ ノ値ニヨ
 ヲツテ定マル。故ニ $f_1(x)$ ガ \mathcal{M}_{x_1} デ $f(x)$ ト一致シテ居ルナ
 ラバ、 $\mathcal{M}_{x_2} - \mathcal{M}_{x_1}$ = 於イテ如何ナル値ヲトラウトモ、
 $g(t) = \Lambda\{t, f(x)\}$ ノ $\mathcal{M}_{x_1} \cdot \mathcal{M}_{x_2}$ = 於ケル殆ソドスベテ
 ノ点ニ於ケル値ハ交ラナイ。又 $f_2(x)$ ガ $\mathcal{M}_{x_2} - \mathcal{M}_{x_1}$ = 於
 イテ $f_1(x)$ ト一致シテ居ルナラバ、 $\mathcal{M}_{x_1} - \mathcal{M}_{x_2}$ = 於イテ如
 何ナル値ヲトラウトモ、 $g(t) = \Lambda\{t, f(x)\}$ ノ $\mathcal{M}_{x_1} \cdot \mathcal{M}_{x_2}$
 = 於ケル値ハカハラナイ。故ニ、 $\Lambda\{t, f(x)\}$ ノ値ハ $\mathcal{M}_{x_1} \cdot \mathcal{M}_{x_2}$
 = 於ケル $f(x)$ ノ値ニヨツテ定マル。故ニ次ノ四ツノ場合ガ
 オコル。

$$(4) \quad \begin{cases} (i) & \mathcal{M} = \mathcal{N} \\ (ii) & \mathcal{M} < \mathcal{N} \\ (iii) & \mathcal{M} > \mathcal{N} \\ (iv) & \mathcal{M} - \mathcal{N} \neq \emptyset, \mathcal{N} - \mathcal{M} \neq \emptyset \end{cases}$$

2. (i)ノ場合ニハ、殆ソドスベテノ t = 對シテ

$g(t) = \Delta \{t, f(x)\}$ ハ, $f(x), t$ の近傍 = オケル値 = 知ら
 ず depend シテ定マレ。

例ハバ, $f(x)$ ノ各点 = オケル Cesàro sum $\Rightarrow g(t)$ ト
 スルトキ、カヨル Operation ハコノ場合 = ナレ。

(ii) ノ場合 = ハ, $\exists x_1, \exists x_2 = 0, \exists x_1, \exists x_2 \neq 0$ トナ
 ルヤウナ x_1 及ビ x_2 ヲトルコトガ出来ル。故ニ、スベテノ
 $f(x) \in E$ ガ一定ノ定數デアレカ、又ハスベテノ $g(x) \in E$
 ガ一定ノ定數ノ場合 = 限り $\Delta(f)$ ガ意味ヲモツ。

(iii) ノ場合 = ハ, 殆ンドスベテノ $t =$ 對シテ $g(t)$ ハ
 $t \in \mathcal{J}_t$ トナルヤウナスベテノ $t_1 =$ 對シテ $\exists \mathcal{J}_{t_1} =$ 於ケル
 $f(x)$ ノ値 = ヨツテ定マレ。乃チ $\bigcup_{t_1} \mathcal{J}_{t_1} =$ 於ケル $f(x)$ ノ
 値 = ヨツテ定マレ。故ニ、 $\exists \mathcal{J}$ 及ビ $\forall \mathcal{J}$ ガ興ヘテレルトキ、
 殆ンドスベテノ $t =$ 對シテ $g(t)$ ハ closed interval
 $[t - \gamma + \alpha, t + \delta - \beta]$ = 於ケル $f(x)$ ノ値 = ヨリ定
 マレ。

例ハバ $K(x) \in L^{\delta}(a, b)$ トスルトキ

$$\Delta(f) = \int_a^b f(x+t) K(x) dx$$

トオクトキ operation ハコノ場合 = ナレ。

(iv) ノ場合 = ハ, $g(t)$ ノ代リ = $g(t+c)$ ヲ考ヘ、 c
 ヲ適當ニトルトキ、(i), (ii) 及ビ (iii) ノ場合 = 帰着サセ得
 レ。

3. 以下 (iii), 並ビ = (iii)₂ reduce 出来ル (iv), 前
 ル場合 = 於イテ $\Delta =$ 閉シテ linear Operation テアルト

假定スル。然ルトキ

定理. Λ が *translatable* = ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ

$$\Lambda \{ t, e^{\lambda x} \} = G(\lambda) e^{\lambda t}$$

トナルコトデアル。コトニ、 $G(\lambda)$ ハ λ ノミノ函数デアリ、*purely imaginary* デアル。

証明ハ (V) ノ定理ト大体ニ於イテハ同様デアル。

4. E 及ビ E_1 ノ一方又ハ両方が任意ノ有限ノ点ヲ連続ナ函数カラ成ル *space* (C) ノ場合ニ同様ノ結果ヲ得ル。

但シ、コノ場合ニ例ヘバ、 $E = E_1 = (C)$ ナルトキニハ、 $(\xi + a, \xi + b)$ が *open* デアルカ *closed* デアルカニヨツテ¹⁾ノ場合ガ二ツノ場合ニ分レル。例ヘバ、 $(\xi + a, \xi + b)$ が *open* ナルトキ $f(x)$ ノ ξ ノ近傍ニオケル値ニヨツテ $g(\xi)$ がキマリ $(\xi + a, \xi + b)$ が *closed* ナルトキニハ $f(\xi)$ ノ値ニヨリ、 $g(\xi)$ が定マル。

次元論プリント

P. Alexandroff: *dimensionstheorie* (Math. Ann. Bd. 106)

ノプリントハ今進行中デス。ソノ實費金壹円也、但シ送料ハ別デス。四六倍判130程。

送料ノ確定値ハ分リマセンが約十銭トシテ前金ヲ願ヒマス、出来次第御送りシマス。