# 438. Quasi-metric space ニ就イテ. III

角谷静夫（阪大）

§. 次ニ $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ 及ビ $\underline{AB}$ ガ何レモ有限デハアルガ有界デナイ場合ヲ考ヘル。

コノ場合ハ前ト同様ニ $\mathbb{F}_A$ ヲ定義シタノデハ $\mathbb{F}_A$ ニ属スル函数 $\varphi_A(x)$ ノ Norm

$$\|\varphi_A\| = \underset{x \in R_1+R_2}{\text{upper bound}} |\varphi_A(x)|$$

ハ必ズシモ有限デハナイ。コノ時ハ次ノ如クスレバヨイ。

先ヅ $\tilde{R}^*$ ヲ $R_1+R_2$ デ *define* サレタ *real non-negative one-valued* ナ函数ノ空間トシ、（$\tilde{R}^*$ ニ属スル函数ノ Norm ガ有限デアルカドウカハ今ハ考慮ニ入レナイ）$\tilde{R}^*$ ニ於ケル函数ノ集合 $\mathbb{F}_A$ ヲ前号ノ場合ト全ク同様ニ *define* スル。

次ニ、此ノ如ク定義サレタ $\mathbb{F}_A$ ノウチカラ一ツノ集合 $\mathbb{F}_{A_0}$ ヲ取リ出シ、$\mathbb{F}_{A_0}$ ニ属スル函数 $\varphi^0_{A_0}(x)$ ヲ選ブ。$\mathbb{F}_{A_0}$ 及ビ $\varphi^0_{A_0}(x)$ ノ取リカタハ全ク自由デアルガ選ンダ以上ハ之レヲ固定スルモノトスル。カクシテ定メラレタ $\varphi^0_{A_0}(x)$ ヲ用ヒテ $\overline{\mathbb{F}}_A$ ヲ

$$\psi_A = \varphi_A - \varphi^0_{A_0}, \quad \varphi_A \in \mathbb{F}_A$$

ナル函数 $\psi_A$ 全体ノ集合トシテ *define* スル。スルト $\psi_A \in \overline{\mathbb{F}}_A$ ニ対シテハ

$$\|\psi_A\| = \|\varphi_A - \varphi^0_{A_0}\| = d(\varphi_A, \varphi^0_{A_0}) \leqq \overline{AA_0}$$

ニテ $\overline{AA_0}$ ハ假定ニヨリ有限デアルカラ $\overline{F}_A$ ニ屬スル函數ノ Norm ハ常ニ有限デアル。

二ツノ函數ノ distance ハ各々ノ函數カラ一定ノ函數 $\varphi^0_{A_0}(x)$ ヲ引イテモ變ラナイカラ、$\overline{F}_A$, $\overline{F}_B$, ……ハ我々ノ問題ノ解ヲ與ヘルコトガ容易ニワカル。（前号ノ議論ハ各々ノ $\varphi_A$, $\varphi_B$, ……ノ Norm ガ有限ト云フコトハ用ヰテヰナカッタ）

§. 次ニ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ……ノウチニ ∞ ニナルモノガ存在スル場合ヲ考ヘル。コノトキモ、若シ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, ……（隨ッテ $\underline{AB}$, $\underline{BC}$ 等）ガスベテ有限（有界デナクトモヨイ）ナラバ我々ノ問題ハ解クコトガ出來ル。

コノ場合ヲ解クタメニハ前ノ§デヤッタ如ク $\overline{F}_A$, $\overline{F}_B$ 等ヲ定義シテ、コレ等ノ $\overline{F}_A$, $\overline{F}_B$ 等ノウチデ Norm ノ有限ナ函數全体カラナル部分集合ヲ $\overline{\overline{F}}_A$, $\overline{\overline{F}}_B$ 等トオケバヨイ。

$\overline{\overline{F}}_A$, $\overline{\overline{F}}_B$ 等ガ我々ノ問題ノ solution デアルコトヲ示スタメニ先ヅコレ等ガ空集合デナイコトヲ示サウ。

前号デ示シタコトニヨリ $F_{A_0}$ ニ屬スル函數 $\varphi^0_{A_0}$ ガ與ヘラレレバ、コレニ對シテ $F_A$ ニ屬スル函數 $\varphi^0_A$ ガ存在シテ

$$d(\varphi^0_A, \varphi^0_{A_0}) \leqq \overrightarrow{AA_0} < \infty$$

トナルカラ（$\varphi^0_{A_0}$, $\varphi^0_A$ ノ Norm ガ有限デアルカドウカハ今ハ問題トシナイ）

$$\psi^0_A = \varphi^0_A - \varphi^0_{A_0}$$

トオケバ $\psi^0_A \in \overline{F}_A$ ニテ

$$\|\psi^0_A\| = d(\varphi^0_A, \varphi^0_{A_0}) \leqq \overline{AA_0} < \infty$$

デアルカラ $\psi_A^0 \in \overline{\overline{\mathbb{F}}}_A$ トナル。即チ $\overline{\overline{\mathbb{F}}}_A$ ハ空集合デナイ。

次ニ

$$\mathrm{I}_1 \quad \overline{\overline{\overline{\mathbb{F}}}_A \overline{\overline{\mathbb{F}}}_B} \leqq \overline{AB} \qquad \mathrm{I}_2 \quad \overline{\overline{\overline{\mathbb{F}}}_A \overline{\overline{\mathbb{F}}}_B} \geqq \overline{AB}$$

$$\mathrm{II}_1 \quad \overrightarrow{\overline{\overline{\mathbb{F}}}_A \overline{\overline{\mathbb{F}}}_B} \leqq \overrightarrow{AB} \qquad \mathrm{II}_2 \quad \overrightarrow{\overline{\overline{\mathbb{F}}}_A \overline{\overline{\mathbb{F}}}_B} \geqq \overrightarrow{AB}$$

$$\mathrm{III}_1 \quad \underline{\overline{\overline{\mathbb{F}}}_A \overline{\overline{\mathbb{F}}}_B} \leqq \underline{AB} \qquad \mathrm{III}_2 \quad \underline{\overline{\overline{\mathbb{F}}}_A \overline{\overline{\mathbb{F}}}_B} \geqq \underline{AB}$$

ナルコトヲ証明シヨウ。

$\overline{\mathbb{F}}_A, \overline{\mathbb{F}}_B$ 等ニ属スル函数ノ間ノ *distance* ト $\mathbb{F}_A, \mathbb{F}_B$ 等ニ属スル コレニ相當スル函数ノ間ノ *distance* トハ相等シク、且ツ $\overline{\overline{\mathbb{F}}}_A, \overline{\overline{\mathbb{F}}}_B$ 等ハ $\overline{\mathbb{F}}_A, \overline{\mathbb{F}}_B$ 等ノ *subset* デアルカラ $\mathrm{I}_1$, $\mathrm{III}_2$ ハ $\overline{\overline{\overline{\mathbb{F}}}_A \overline{\overline{\mathbb{F}}}_B}$, $\underline{\overline{\overline{\mathbb{F}}}_A \overline{\overline{\mathbb{F}}}_B}$ 等ノ定義ヨリ明カデアル。

$\mathrm{II}_1$ ガ成立スルコトハ、任意ノ $\varphi_B \in \mathbb{F}_B$ ニ對シテ $\varphi_A^0 \in \mathbb{F}_A$ ヲ

$$d(\varphi_A^0, \varphi_B) \leqq \overrightarrow{AB}$$

ナル如ク定メルコトガ出來ルコトヨリ明カデアル。何者、コレト全ク同様ノコトヲ $\overline{\mathbb{F}}_A, \overline{\mathbb{F}}_B$ ニツイテ考ヘレバ任意ノ $\psi_B \in \overline{\overline{\mathbb{F}}}_B \subseteq \overline{\mathbb{F}}_B$ ニ對シテ $\psi_A^0 \in \overline{\mathbb{F}}_A$ ガ定マッテ

$$d(\psi_A^0, \psi_B) \leqq \overrightarrow{AB}$$

トナル。

今 $\psi_B \in \overline{\overline{\mathbb{F}}}_B$ ニテ $\|\psi_B\| < \infty$ デアレバ假定ヨリ $\overrightarrow{AB} < \infty$ デアルカラ

$$\|\psi_A^0\| \leqq \|\psi_B\| + \overrightarrow{AB} < \infty$$

トナリ $\psi_A^0 \in \overline{\overline{\mathbb{F}}}_A$ トナル。ヨッテ $\overrightarrow{\overline{\overline{\mathbb{F}}}_A \overline{\overline{\mathbb{F}}}_B} \leqq \overrightarrow{AB}$ ヲ得。

$I_2$, $II_2$ ガ成立スルコトハ、$F_A$, $F_B$ ニ関スルコレラト同様ノ関係ガ成立スルコトガ $R_1$ 又ハ $R_2$ ノ点Aニ於イテ考ヘルコトニヨリ知ラレタコトヲ考ヘレバ容易ニ分ル。何者レ点Aニ於イテノミ *Norm* ノ有限ナ函数ノ取ル値ヲ変化サシテモ、函数ノ *Norm* ハ $\infty$ トハナラナイカラデアル。

（$I_2$ ニテ $\overline{AB}=\infty$ ナルトキハ $\overline{\overline{F_A}}\,\overline{\overline{F_B}}\geqq n$ ガ任意ノ *integer* $n$ ニ対シテ成立スルコトヲ示セバヨイ）

次ニ $III_1$ ガ成立スルコトヲ示サウ。コレハ少シ面倒デアル。

前号ニテ考ヘタコトニヨツテ $\varphi_A\in F_A$, $\varphi_B\in F_B$ ガ與ヘラレレバ $\varphi_B^0\in F_A$, $\varphi_B^0\in F_B$ ヲ

$$d(\varphi_A^0,\varphi_B^0)=\underline{AB}$$

ニテ且ツ

$\varphi_A(x_0)\geqq\varphi_B(x_0)$ ナルトコロニテハ

$$\varphi_A(x_0)\geqq\varphi_A^0(x_0)\geqq\varphi_B^0(x_0)\geqq\varphi_B(x_0),$$

$\varphi_A(x_0)\leqq\varphi_B(x_0)$ ナルトコロニテハ

$$\varphi_A(x_0)\leqq\varphi_A^0(x_0)\leqq\varphi_B^0(x_0)\leqq\varphi_B(x_0)$$

ナル如ク定メルコトガ出来タ。コレハ $\overline{F_A}$, $\overline{F_B}$ ニ於イテ考ヘレバ $\psi_A$, $\psi_B$ ニ対シテモ全ク同様デアルコトハ容易ニワカル。依ッテ今 $\psi_A$, $\psi_B$ トシテ夫々 $\overline{\overline{F_A}}$, $\overline{\overline{F_B}}$ ニ属スル函数ヲトッテオケバ、コレ等ハ勿論夫々 $\overline{F_A}$, $\overline{F_B}$ ニ属スルカラ $\psi_A^0\in\overline{F_A}$, $\psi_B^0\in\overline{F_B}$ ヲ

$$d(\psi_A^0,\ \psi_B^0)=\underline{AB}$$

$$\mathrm{Min}\,(\psi_A(x_0),\psi_B(x_0))\leqq\psi_A^0(x_0),\ \psi_B^0(x_0)$$

$$\leqq Max\left(\psi_A(x_0), \psi_B(x_0)\right)$$

ヲ満足スル如ク定メルコトガ出來ル。コレヨリ

$$\|\psi_A^0\|, \|\psi_B^0\| \leqq Max(\|\psi_A\|, \|\psi_B\|) < \infty$$

トナッテ $\psi_A^0 \in \overline{\overline{F}}_A$, $\psi_B^0 \in \overline{\overline{F}}_B$ ヲ得ル。即チ $\psi_A^0 \in \overline{\overline{F}}_A, \psi_B^0 \in \overline{\overline{F}}_B$ ニテ

$$d(\psi_A^0, \psi_B^0) = \underline{AB}$$

ナル函數 $\psi_A^0, \psi_B^0$ ガ存在スル。

依ッテ、 $\underline{\overline{\overline{F}}_A \overline{\overline{F}}_B} < \underline{AB}$ ヲ得。

§. 次ニ $\overline{AB}$ ノミデナク $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ 等ノウチニモ $\infty$ トナルモノガ存在スル場合ヲ考ヘル。（$\underline{AB}$ ハイツモ有限！）

コノ場合ハ、我々ノ問題ハ必ズシモ解ケルトハ限ラナイ。

次ニカヽル不可能ナ場合ノ例ヲ掲ゲル。

今 $f(x, y)$ ヲ空間 $R \times R$ ニテ *define* サレタ *real, non-negative, one-valued symmetric function* ニテ、R デ定義サレタ如何ナル *real, non-negative one-valued function* $g(x)$ ニ對シテモ

$$f(x, y) \leqq g(x) + g(y)$$

ガ成立シナイモノトセヨ。（カヽル $f(x, y)$ ガ存在スルコトハ紙上談話會、本号、次ノ論文参照）

R ノ *element* A, B ニ對シテ

$$\overline{AB} = \overline{BA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = \infty$$

$$\underline{AB} = \underline{BA} = f(A, B) \left(= f(B, A)\right)$$

トオケ。コノ $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\underline{AB}$ ハ明カニ條件 $1^\circ$—$5^\circ$ ヲ満足シテヰルガ、此ノ如ク *define* サレタ *quasi-metric space* ハ<u>如何ナル *metric space* ヘモ</u>"*einbetten*" スルコトハ出來ナイ。

何トナレバ若シコノ "*Einbettung*" ガ可能デアツタトスレバ、ソノ空間ヲ $R^*$ トセヨ。$R^*$ ニ於ケル開集合 $\mathbb{F}_A$, $\mathbb{F}_B$, ------ ガアツテ

$$\overline{\mathbb{F}_A \mathbb{F}_B} = \overline{AB}, \quad \overrightarrow{\mathbb{F}_A \mathbb{F}_B} = \overrightarrow{AB}, \quad \underline{\mathbb{F}_A \mathbb{F}_B} = \underline{AB}$$

等ガ満足サレテヰル筈デアル。

今 $R^*$ ノ一点 $X_0$ ヲ取レバ、コレヲ同時ニ開集合 $\mathbb{F}_{x_0}$ デアルト考ヘルコトガ出來ル。スルト.

$\overline{\mathbb{F}_{X_0} \mathbb{F}_{X_0}} = \delta(\mathbb{F}_{X_0}) = 0$ デアルカラ

$$\underline{\mathbb{F}_{X_0} \mathbb{F}_A} = \underline{\mathbb{F}_A \mathbb{F}_{X_0}} = \overrightarrow{\mathbb{F}_A \mathbb{F}_{X_0}}$$

トナル。コレヨリ

$$\underline{\mathbb{F}_{X_0} \mathbb{F}_A} + \underline{\mathbb{F}_{X_0} \mathbb{F}_B} = \overrightarrow{\mathbb{F}_A \mathbb{F}_{X_0}} + \underline{\mathbb{F}_{X_0} \mathbb{F}_B} \geqq \underline{\mathbb{F}_A \mathbb{F}_B} = \underline{AB}$$

ヲ得ル。ヨツテ今

$$g(X) = \mathbb{F}_{X_0} \mathbb{F}_X$$

トオケバ任意ノ $A, B \in R$ ニ對シテ

$$\underline{AB} = f(A, B) \leqq g(A) + g(B)$$

トナリコレハ $f(x, y)$ ニ對スル初メノ假定ニ矛盾スル。ヨツテ、コノ *quasi-metric space* ハ如何ナル *metric space* ニモ "*einbetten*" デキナイ。

昭和十一年度1月—6月分ノ會費金貳円也
ヲ至急御拂込ミ下サイ。

大阪市北區

大阪帝國大學
理學部數学教室　清水辰次郎
振替口座番號　大阪一七七四三番

前期會計決算ハ第84号ニ報告シテアリマス。