440. 非同次型線状移動可能函数方程式ニツイテ(III)

北川　敏男（阪大）

1. (I)-(II)ニ於イテ積分 $N(x, x_0; f:p)$ 又ハソノ変形ヲ利用スルコトニヨリ，函数方程式

(1) $\Gamma f(x) = g(x)$, $(-\infty < x < \infty)$

ノ解ヲ論ジタ。(II)ニ於イテハ、Bochner ノ所謂 Gesamtstufe ガ finite デアルヤウナ $g(x)$ ヲ與ヘテ、同様ナ $f(x)$ ヲモトメルコトヲ考ヘタ。コヽデモ，$g(x)$ ヲ或ル種ノ函数空間ノ element ナルトキ、同ジ函数空間ニ属スル $f(x)$ ヲ求メル問題ヲ考究スルノデアルガ、ソノ函数空間ハ函数ノ大サニ関スル制限ヲ規約サレタバカリデナク、$\{e^{i\lambda x}\}$

$(-\infty < \lambda < \infty)$ ニ関スル或ル意味デノ dissection ニツイテ規約サレタ函數カラナル空間デアル。

乃チ、概週期函數，$\mathcal{B}$-class，並ビニ $\mathcal{F}_k$-class 等ヲ主題トシマス。コレラノ特殊ノ函數空間デ (1) ヲ論ズル場合，同一ノ principle デ支配サレル部分ガ多イノデ、コレ等ヲ包括スルヤウ、成ルベク一般的ニ議論ヲ進メタイ，ソノタメニ、若干ノ概念ヲ導入スル。

2. $\boxed{\text{定義 1}}$ 實軸上ノ或ル集合 R ノ部分集合ノアル system $\mathbf{S}$(R) ニ屬スル任意ノ集合 S ニ對シテ、実軸上ノ集合 $\mathfrak{M}_S$ ト、$\mathfrak{M}_S$ デ定義サレタ函數ノ或ル集合 $\mathcal{F}_S$ ガ一意ニ定マルトスル。

$\mathfrak{M}_{S_1}\cdot\mathfrak{M}_{S_2} \neq 0$ ナルトキ、$S_1 \dotplus S_2 \subset \mathbf{S}$(R) デアッテ、$\mathcal{F}_{S_1\dotplus S_2}$ ハ次ノ如キ $f(t)$ ノ全体カラナル。即チ $f(t) \in \mathcal{F}_{S_1\dotplus S_2}$ ナルタメニ必要且ツ充分ノ條件ハ，次ノ如キ $f_1(t)$ 並ニ $f_2(t)$ ガ存在スルコトデアル。

$\mathfrak{M}_{S_1} \dotplus \mathfrak{M}_{S_2} = \mathfrak{M}_{S_1\dotplus S_2}$ ニシテ

$$(2)\quad \begin{cases} \text{(i)} & f_i(t) \in \mathcal{F}_{S_i} \quad (i=1,2) \\ \text{(ii)} & f(t) = f_1(t) = f_2(t) \qquad (t \in \mathfrak{M}_{S_1}\cdot\mathfrak{M}_{S_2}) \\ \text{(iii)} & f(t) = f_1(t) \qquad (t \in \mathfrak{M}_{S_1} - \mathfrak{M}_{S_2}) \\ \text{(iv)} & f(t) = f_2(t) \qquad (t \in \mathfrak{M}_{S_2} - \mathfrak{M}_{S_1}) \end{cases}$$

カヽルトキ、$\mathcal{F}_{S_1\dotplus S_2} = \mathcal{F}_{S_1} \dotplus \mathcal{F}_{S_2}$ デ表ハシ、$\mathcal{F}_{S_1}$，$\mathcal{F}_{S_2}$ ノ<u>和函數空間</u>ト云フ。

$\boxed{\text{定義 2}}$ （單調ナル函数空間ノ集合）今、定義 1 デ述ベタ $\mathcal{F}_S$ ハ任意ノ $S \in \mathbf{S}$(R) ニ對シテ Completeness ヲ

除イテハ Banach ノ意味デノ normalised space ノ條件ヲミタシ、ソコニ於ケル Norm ヲ $\|f(t)\|_S$ デ示ス。若シ，$S_1 \supset S_2$ ナルトキニハ常ニ，$S_1 = S_2 \dotplus S_3$ ナル如キ $S_3 \in \mathfrak{S}(R)$ ガ存在シ従ツテ定義1ニヨリ $\mathfrak{M}_{S_1} \supset \mathfrak{M}_{S_2}$。而シテ

$$f(t) = f^*(t) \qquad (t \in \mathfrak{M}_{S_2} \text{ ニ對シテ})$$

ナルトキ常ニ

$$\|f(t)\|_S \geqq \|f^*(t)\|_{S_2}$$

ナラバ $\{\mathfrak{F}_S\}$ $(S \in \mathfrak{S}(R))$ ヲバ単調ナル函數空間ノ集合デアルトイフ。

$\boxed{\text{定義 3}}$ （均等ナル函數空間ノ集合） 定義1ニ於イテ $S \in \mathfrak{S}(R)$ ニシテ $T_\sigma S \subset R$ ナルトキニハ常ニ、$T_\sigma S \in \mathfrak{S}(R)$ デアリ、且ツ $T_\sigma S = S_\sigma$ トオクトキ

$$1^\circ \quad \mathfrak{M}_{S_\sigma} = T_\sigma \mathfrak{M}_S$$

$$2^\circ \quad f(t) \in \mathfrak{F}_{S_\sigma} \rightleftarrows f(t+\sigma) \in \mathfrak{F}_S \qquad (t \text{ ガ Variable})$$

ガ満足サレテ居ルトキ，$\mathfrak{S}(R)$ ヲ（Translation ニ對シテ）均等ナル（homogeneous）ナ函數空間トイフ。（但シ $T_\sigma K$ トハ，K ノ各 element x ニ對シテ $x+\sigma$ ナル如キ element ノ全体）。

$\boxed{\text{定義 4}}$ 単調，均等ナル函數空間ノ集合 $\{\mathfrak{F}_S\}$ ニ於イテ

$$\|f(t)\|_{S_\sigma} = \|f(\sigma+t)\|_S$$

ナルトキ translatable ナ Norm トイフ。

$\boxed{\text{定義 5}}$ （$\{\mathcal{F}_S\}$ 内ノ Linear Aggregate $L^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$）。

單調，均等ナル函數空間ノ集合 $\{\mathcal{F}_S\}$ ニ於イテ、次ノ條件ヲ充ス函數 $l(x)$ ノ集合ヲ、$\mathfrak{S}_\lambda$ ニ関スル；$(\mathcal{F}_S)$ 内ノ Linear Aggregate トイヒ、コレヲ $L^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$ デ表ハス。

條件 1° $l(x)$ ハ x ヲ固定スルトキ，$\mathfrak{S}_\lambda$ ヲ定義域トスル λ ノ函數 $e^{i\lambda x}$ ノ Linear functional ニナツテヰル：コレヲ

$$l(x) = A_\lambda(e^{i\lambda x})$$

デ表ハス。

條件 2°. $l_i(x) \in L^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$ $(i=1,2)$ ナラバ

$$l_1(x) + l_2(x) \in L^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$$

條件 3°. $l(x) \in \mathcal{F}_S$ $(S \in \mathfrak{S}(R)$ ニ對シテ$)$

條件 4°. $\mathfrak{S}_\lambda$ ニテ定義サレタ函數 $G(\lambda)$ ノ集合 $\mathbb{K}_\lambda$ ガアツテ $l(x) = A_\lambda(e^{i\lambda x}) \in L^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$ ナルトキ常ニ

$$A_\lambda(G(\lambda)e^{i\lambda x}) \in L^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$$

但シ $\mathbb{K}_\lambda$ ニハ，

(i) $G(\lambda) = C$ （任意ノ常數）（$\lambda \in \mathfrak{S}_\lambda$ ノトキ）ナル函數ガフクマレル。

(ii) 任意ノ實數 s ニ對シテ $G(\lambda) = e^{i\lambda s}$ （$\lambda \in \mathfrak{S}_\lambda$）ナル如キ函數ガフクレテヰルトスル。[1]

---

(1) 注意：コノコトカラ

$$l(x) \in L^R_{\mathfrak{S}_\lambda} \text{ ノトキ } l(x+s) \in L^R_{\mathfrak{S}_\lambda} \text{ トナル。}$$

$\boxed{\text{定義 6}}$ （函數空間ノ集合 $C^R_{\mathfrak{S}_\lambda}[\mathfrak{F}_S]$）單調, 均等ナル函數空間ノ集合 $\{\mathfrak{F}_S\}$ ニ屬スル element ニシテ次ノ條件ヲ、或ル Linear Aggregate $L^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$ ニ關シテ滿足スル函數空間ノ集合ヲ $C^R_{\mathfrak{S}_\lambda}[\mathfrak{F}_S]$ デ表ハス。

條件 1° 適當ニ選ンダ $S \in \mathfrak{S}(R)$ ニ對シテ

$$f(t) \in \mathfrak{F}_S$$

條件 2° 任意ノ正數 ε ニ對シテ、常ニ

$$\| f(t) - l(t) \|_S < \varepsilon$$

ナル如キ $l(t) \in L^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$ ガ見出サレル。

3. 前節ノ説明トシテ familiar ナ若干ノ例ヲ擧ゲル。

例 1. Bohr ノ概週期函數族：今

(1) $R = \underset{t}{E}[-\infty < t < \infty]$, $\mathfrak{S}(R) = (R)$ [1]

(2) $\| f(t) \|_R = \underset{-\infty < t < \infty}{l.u.b.} | f(t) |$

トスレバ、單調, 均質等ハ trivially ニ滿足サレテヰル。更ニ

(3) $\mathfrak{S}_\lambda = E_\lambda[-\infty < \lambda < \infty]$

---

(1) コノ意味ハ集合ノ System $\mathfrak{S}(R)$ ハ R ノミカラナルコトヲ表ハス。例 1, 2, 3 ニ於イテハ, 第二節ニ於ケル諸定義ハ, 餘計デアル。モット簡明ニスマセルコトハ明カデアル。例 4 ニ於イテサヘ、尚コノ感ガアラう。實ハ Valiron ノ無限項ノ微分方程式ニ至ッテソノ必要 (?) ガ明カニナルヤウニ思ハレル。

(4) $L^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$: $\quad l(x)=\sum_{k=1}^{N} A_k e^{i\lambda_k x} \quad (\lambda_k \in \mathfrak{S}_\lambda)$

ニトレバ，$C^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$ ハ Bohr ノ概週期函數ノ全体ニナル。

例2. $L^2(-\infty,\infty)$ ニ於イテハ，(1), (3) ヲ例1ト同ジニトリ，$L^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$ トシテ

$$(5) \quad l(x)=\int_{-g}^{g} e^{i\alpha x}\Gamma(\alpha)\,d\alpha \qquad (0<g<\infty)$$

(コヽニ $\int_{-g}^{g}|\Gamma(\alpha)|^2<\infty$ トスル) ノ如キ全体ニトレバ

$$(6) \quad \|f(t)\|_R=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt}$$

ナル Norm ノ意味ニ於テ $C^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$ ヲ形成スル。

例3. Bochner ノ B-class ニ對シテハ，

$$(7) \quad l(x)=\int_{-g}^{g} e^{i\alpha t}\,dV(\alpha) \qquad (g\text{ ハ有限})$$

ノ全体ヲ $L^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$ トスレバ，Norm ヲ (2) ニトッテ $C^R_{\mathfrak{S}_\lambda}$ ヲ形成スル。

例4. 有限區間ニテ L^p ニ属スル函數：$a<\alpha<0<\beta<b$ トシ $\beta-\alpha=2\pi$ トスル。

$$R=[a,b], \quad \mathfrak{M}_x=(x+\alpha,\ x+\beta)$$

$\mathfrak{F}_x=L^p(x+\alpha,x+\beta)$ トスル。然ルトキ

$$\sqrt[p]{\int_{x+\alpha}^{x+\beta}|f(t)|^p dt}=\|f\|_x$$

トオクトキ、單調，均質ナ、且ツ *translatable* ナ距離ヲモツタ函數空間ノ集合ヲナス。而シテ

$$\Omega=(0,\pm 2\pi i,\pm 4\pi i,\cdots\cdots,\pm 2n\pi i,\cdots\cdots)$$

トシ，

$$l(x)=\sum_{k=N}^{N}a_k e^{2ik\pi}$$

トオクコトニヨリ、$C^R_{\Omega_\lambda}$ ヲ形成スルコトがワカル。

4. 以下常ニ、函數空間ノ集合ニ關シテハ，單調、均等，可遷的ニ *normalise* サレテキルコト等ハ假定スル。簡單ノタメニ、§5デ R が有限區間ノトキ，§6デ R が $(-\infty,\infty)$ ナル場合ニツキ、夫々以下ニ用キル *Lemmas* ヲアゲテオク、コレラノ函數空間ノ集合ヲ $[\mathcal{F}^\beta_\alpha]$, $[\mathcal{F}]$ デ夫々示ス。

5. コヽデ問題ニナルノハ次ノ如キ *linear translatable operation* Λf デアル。

$\boxed{\text{條件I}}$ $\underset{x}{\Lambda}_t(f(t))=g(x)\in[\mathcal{F}^\beta_\alpha]$ ハ x ヲキメルトキ，f ニ關シテハ *distributive* デアル、即チ

$$\Lambda_t(c_1f_1(t)+c_2f_2(t))=c_1\underset{x}{\Lambda}_t(f_1(t))+c_2\underset{x}{\Lambda}_t(f_2(t))$$

$\boxed{\text{條件II}}$ $i\lambda\in\Omega_\lambda$ ニ對シテ

$$\underset{x}{\Lambda}(e^{i\lambda t})=G(i\lambda)e^{i\lambda x}$$

而シテ $G(i\lambda)\in\mathbb{K}_{\Omega_\lambda}$ ナリトスル。

$\boxed{\text{條件III}}$

$$\|\underset{x}{\Lambda}_t(f(t))\|_x\leqq G\|f(t)\|_x$$

コヽニ、正數 G ハ f 及ビ x ニ独立ニエラベル。

コヽニ §2 デ導入シタ *Linear Aggregates* ニ関シテ次ノ假定ヲオク。

$\boxed{\text{條件IV}}$ $L^R_{\Omega\lambda}$ ニ属スル任意ノ *Linear Aggregate* $l_\lambda(e^{i\lambda t})$ ニ関シテ

$$\Lambda_x\left(l_\lambda(e^{i\lambda t})\right)=l_\lambda\left(\Lambda_{x\,t}(e^{i\lambda t})\right)$$

デアルトスル。

然ルトキ、次ノ定理ガ成立スル。

$\boxed{\text{補助定理I}}$ 若シモ x, $x+\tau$ ガ共ニ R ニ属スルナラバ

$$\Lambda_{x+\tau\,t}\left(f(t)\right)=\Lambda_{x\,t}\left(f(\tau+t)\right)$$

トナル。乃テ（以上ノ制限ノモトデ）*translatable* ニナル。

6. 今、$R=(-\infty,\infty)$, $\mathcal{S}(R)=(R)$ トシ, Λ ハ $f(t)\,\varepsilon\,[\mathcal{F}]$ ヲ $g(x)=\Lambda_{x\,t}(f(t))\,\varepsilon\,[\mathcal{F}]$ ニウツスモノトシ、§5ノ條件I, II ニ加フルニ

$\boxed{\text{條件III}^*}$ $\|\Lambda_{x\,t}(f(t))\|\leqq G\|f(t)\|$

トスル。然ルトキ

$\boxed{\text{補助定理II}}$ 任意ノ實數 x 及ビ τ ニ於テ

$$\Lambda_{x+\tau\,t}\left(f(t)\right)=\Lambda_{x\,t}\left(f(\tau+t)\right)$$

7.[1] 以上ヲ準備トシ，函數方程式(I)ニ関スル *Operational Calculus* ニツイテ論ズル。$g(x)$ ノ属スル函數

ヲ$\mathfrak{F}$トス。

1°. Aノ*Definitionsbereich*ヲ$\vartheta(A)$トシ，Afハコンデ、*linear operation*デアリ，

2°. $f \varepsilon \vartheta(A)$ノトキニハ，（従ッテ空間ノ均質性カラ$T_\alpha f \varepsilon \vartheta(A)$デアルガ）

$$AT_\alpha f = T_\alpha Af$$

ガ成立スルモノトスル。$\mathfrak{F}$ヲアタヘルトキ、カヽル*Linear translatable operation*ノウチ、*Definitionsbereich*ガ$\mathfrak{F}$ト一致スルモノハ，タシカニ*Ring*ヲツクル．コレヲ$\boldsymbol{R}$デ表ハス，特ニ$\boldsymbol{R}$ニ属シ且ツ任意ニ$g \varepsilon \mathfrak{F}$ヲ與フルトキ

$$Af = g.$$

ナル如キ$f \varepsilon \mathfrak{F}$ガ一ツ、而シテ唯一ツ存在スル様ナAニ對シテハ今假リニ

$$g = Bf$$

トオケバ，Bハ

$$AB = BA = E$$

ノ性質ヲモツカラ、$B = A^{-1}$トオク、コレハ勿論$\boldsymbol{R}$ニ属スル。

カヽルAノ全体ハ$\boldsymbol{R}$ニ於イテ所謂*Einheitsgruppe*ヲ形成スル。尚定理IIニヨリ$\boldsymbol{R}$ハ*Multiplikation*ニ關シテ*abelisch*デモアル。

---

(1) §7－8デハ，*Linear translatable operator*ヲA, B, C，等デ表シテキル。ぎりしあノ大文字ノ代リニ。

8. *Dissection* ノ方法ガ適用サレルタメ、次ノ條件ヲ $\mathfrak{F}$ ニ加ヘル：

條件(D). $R=(-\infty,\infty)$ ニテ任意ノ四數 $\alpha_2<\alpha_1<\beta_1<\beta_2$ ヲ與ヘルトキ

$$\begin{aligned} g(i\lambda) &= 0 & \lambda &\leqq \alpha_2 \\ &= 0 & \lambda &\geqq \beta_2 \\ &= 1 & \alpha_1 &\leqq \lambda \leqq \beta_2 \end{aligned}$$

ナル如キ *generating function* ヲモツタ *linear translatable operator* ニシテ $\boldsymbol{R}$ ニ屬スル様ナモノガ必ズ存在スル。

條件(E). $A \varepsilon \boldsymbol{R}$ ニシテ且ツスベテノ $f \varepsilon \mathfrak{F}$ ニ對シテ

$$Af=0$$

ナルタメニハ A ノ *generating function* $G(i\lambda)$ ハ恒等的ニ零ニナルコトガ必要且ツ充分デアル。[1]

9. §7マデノ假定ト條件(D),(E) ノモトニ於イテ $A \varepsilon \boldsymbol{M}$ ナルタメニ必要且ツ充分ナ條件ハ $\dfrac{1}{G(i\lambda)}$ ヲバ母函數トスル *generating function* ガ M ニ屬スルコトデアルノハ勿論デアルガ、実際役ニ立チソウナモノトシテ次ノ定理ヲ擧ゲル。

---

(1) コノ條件(E)ガ充サレテヰナイ場合デモ，コレニ *reduce* シウル。即チ，上ノ如キAノ全体ヲ $\mathfrak{O}$ トオク、而シテ *Restklassenringe* $\boldsymbol{R}/\mathfrak{O}$ ヲ考ヘレバヨイ。

定理1. $\mathfrak{F}=C^{R}_{\Omega_\lambda}$ が complete デアリ、$A\in \boldsymbol{R}$ ニシテ $\infty>|G(i\lambda)|\geqq a>0$ ナルトキニハ、條件(D), (E) ノモトニ於テ、$A\in \boldsymbol{M}$