451. *diskret* ナ賦値デ完全ナ体ノ上ノ多元体（特ニ惰性多元体ノ存在）II.

中山　正（阪大）

証明ノ不完全ナ所ニ氣ヅキソレヲナホスノニ手間ドッテシマヒ遅レマシタが前回ノ後ヲツゞケル。記号ハソノマゝ、即チ *diskret* ナ賦値デ完全ナ体 K ヲ核心ニモツ多元体 D, 且ツ $(D:K)=n^2$, D/K ノ剰餘類階級 p, 分岐指数 e, 故ニ $pe=n^2$、D ノ剰餘類多元体ヲ $\mathfrak{D}$, K ノソレヲ $\mathfrak{k}$ トシ, $\mathfrak{D}$ ノ核心ヲ $\mathfrak{z}$ トスル。

惰性多元体トハ D ノ部分多元体 T デ、T/K ハ不分岐、且ツ $\mathfrak{D}$ ノ元ハ T デミナ代表サレル如キモノデアル。前述ノ如ク D ノ部分多元体 R $(\supseteq K)$ ニ於イテ、ソノ *Max-ord.* ハ D ノソレ $\mathfrak{O}$ ト R ノ *Durchschnitt*, 素いでやるニツイテモ同様、而シテ二ツ $R_1 \supset R_2$ ノ間ニ於テ分岐指数等ヲ云々シ得ル、ソノ言葉ヲツカヘバ, D ハ T ニ對シテ *voll-verzweigt*.

カゝル T ハ后述ノ如ク一意的ニハキマラヌが, 互ニ同型ニナル。

所謂 $\mathfrak{z}$ 遅数体ノトキニハ特殊ナ事情ノタメ前記(II)ニ相當スル考察デ T ノ存在が証明サレルノダが, 一般ノ場合ヲ以下ニ述ベタイ。

<u>$\mathfrak{k}$ ハヤハリ *vollkommen* トスル</u>（使フノハ $\mathfrak{z}/\mathfrak{k}$ が第一種ナルコトノミ）

（V） n が素數巾 l^s ナラバ、タシカニ惰性多元体ハ存在.

先ヅ（II）ニヨッテ、ソノ存在ノワカッタ不分岐最大部分体ノ一ツヲ W トスル、ソノ剰餘体 $\mathfrak{W}$ ハ $\mathfrak{z}$ ヲフクム.（含マナイトスレバ $\mathfrak{W}\mathfrak{z}$ ナル体ガ $\mathfrak{k}$ ニ對シ n ヨリ高次ニナリ（III）ニ矛盾）、然ラバ容易ニワカル如ク W ハ丁度 $\mathfrak{z}$ ヲ剰餘体ニモツヤウナ部分体 Z ヲ有ス。$(Z:K)=(\mathfrak{z}:\mathfrak{k})$、コノ Z ノ元ト可換ナ元全体ナル多元体ヲ T トスレバ，コノ T ガモトムル T ニナル、階數ヲ考ヘレバワカル如ク、ソレニハ T/K ガ不分岐ナルコトヲ云ヘバヨイ。

$$e=(Z:K)=l^t$$

トオク。（（IV）參照）

證明. 1） Z ヲフクム K ノ最小がろあ擴大 L ガ l ノ巾ノ次數ナル時、（$\mathfrak{z}/\mathfrak{k}$ ガ第一種ナコトカラ Z/K, L/K ガ第一種ナルコトガワカル）. L/K ノがろあ群ヲ $\mathfrak{G}$, ソノ位數ヲ l^α, Z ニ對應スル部分群ヲ $\mathfrak{G}_1$ トスル、シカラバ p 群ノ理論デヨク知ラレテヰルヤウニ $\mathfrak{G}$ ニハ $\mathfrak{G}_1$ ヲフクミ、位數 $l^{\alpha-1}$ ナル部分群 $\mathfrak{h}$ ガアリ（例ヘバ園氏群論 128 頁系 2 ヲ反復）、$\mathfrak{h}$ ハ不変部分群デアル（同系 1）、$\mathfrak{h}$ ニ對スル体ヲ H トスル、H/K ハ l 次巡回擴大。

H ノ元ト可換ナ元全体 $V(H)$ ヲ考ヘル、コレノ K ニ對スル分岐指數ガ $e/l=l^{t-1}$ ナルコトヲ証明スル。

剰餘類階数ハ高々 r ダカラ分岐指数ハ少クモ e/l, ヨッテ e デナイコトヲ云ヘバヨイ、假ニ e ダトスル、然ラバ

$\nabla(H)$ノ中ノ D ノ素いでやるノ *Primelement* π が存在スル。

他方ニ於テ H/K ノ（H ハ Z ノ部分体ナリ！）アル同型置換（$\neq 1$）ヲ S トスレバ H/K が不分岐ダカラ容易ニ

$$\lambda^S \neq \lambda \mod \mathfrak{P},\ \text{即チ} \mod \pi$$

ナル $\lambda \in H$ ガアル、シカルニ S ナル置換ハヨク知ラレテキル様ニ D ノアル元ニヨリ変換デオコサレル、例ヘバ ξ ニヨル変換トスル。

$\xi = \xi_0 \pi^a$（ξ_0 が *Einheit*）トスレバ，π が H ノ元ト可換ナノダカラ ξ ノ代リニ ξ_0 ヲ用ヒラレル、ヨッテ ξ ハハジメカラ *Einheit* トスル，故ニ

$$\lambda^S = \xi^{-1}\lambda\xi \neq \lambda \quad \mod \pi$$

カラ $\lambda\xi \neq \xi\lambda \mod \pi$ が出ル、然ルニ之レハ $\lambda \in Z$，故ニソノ剰餘類が $\mathfrak{O}$ ノ核心 $\mathfrak{P}$ ニ屬スルコトニ矛盾。

ヨッテ $\nabla(H)/K$ ノ分岐指数 e/l，故ニ $\nabla(H)/H$ ノ分岐指数 e/l，剰餘類階数が r/l，ヨッテソノ剰餘多元体ハ $\mathfrak{O}$ ト一致スル。

$\nabla(H) \supseteq Z$ デアリ、$\nabla(H)$ デ Z ノ元ト可換ナ元ハヤハリ T デアル. $\nabla(H)/H$ ノ階数ハ D/K ノヨリ小、故ニ階数ニヨル帰納法ニヨッテ我々ノ主張ニ到達出來ル.（Z/H ノがろあ体ハ勿論 L ニフクマレル！）

証明. 2) <u>一般ノ場合</u>. Z/K ノがろあ体 L，ソノがろあ群 $\mathfrak{G}$，$\mathfrak{G}$ ノ l-しろう群ノ一ツヲ $\mathfrak{G}'$ トスル、$\mathfrak{G}'$ ニ對應スル体ヲ K' トスル、不分岐拡大 K'/K ノ次数ハ l ト素

デアル。

故ニ $D_{K'}$ ハヤハリ多元体!!! 且ツ D ノ素いでやるノ Primelement ガ $D_{K'}$ デモソウ、$D_{K'}$ ノ剰餘類多元体ガ $\mathfrak{D}\times\mathfrak{k}'$（$\mathfrak{k}$ ニ關スル直積）ナルコトガ容易ニワカル、$\mathfrak{D}\times\mathfrak{k}'$ ノ核心ハ $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{k}'$, ソレハ K' ノ上ノ不分岐拡大 $Z\times K'$ ノ剰餘体デアル、$Z\times K'=ZK'$（Z ノ部分体トシテノ合成）ヲフクム最小ノ K' ニ對スルがろあ拡大ハ L ニフクマレ、ソノ K' ニ對スル次數ハ l ノ巾デアル、故ニ I) ノ場合ニヨリ，ZK' ノ元ト可換ナ $D_{K'}$ ノ元全体 T' ハ K' ニ對シ不分岐、シカルニ $T'=T\times K'$ ダカラ T/K ガ不分岐ナルコトガ証明サレル。

(VI) n ガ素數巾デナイ一般ノトキノ証明

$$n=l_1^{s_1}l_2^{s_2}\cdots\cdots\cdots\cdots l_u^{s_u}$$

トスル、ソレニ對應シテ $D=D_1\times\cdots\cdots\cdots\times D_u$（但シ $(D_i:K)=l_i^{2s_i}$）トスル（ぶらうあー）.

(V) ニヨリ存在ノ知レタ D_i/K ノ惰性多元体ノ一ツヲ T_i トスル。$T_1\times\cdots\cdots\times T_u$（K ニ關スル直積）ガ D ノ惰性多元体ニナル．ソノタメ D_i/K ノ剰餘類階數ソノ他ニ i ヲツケテ表ハス。$r_i e_i=l_i^{2t_i}$. 然ラバ $e=\prod e_i$, $r=\prod r_i$ デアル．何トナラバ π_i ハ e_i ニ乘ジテ p_K ト Einheit ノ積ニナルノダカラ D/K ノ分岐指數 e ハ e_i デワレル、故ニ $\prod e_i$ デワレル．而シテ π_i ハ D ノ素いでやるデワレルノダカラ $\mathfrak{D}$ ニハ

$$\mathfrak{D}_1 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{D}_u$$

ト準同型ナ環ガフクマレル、シカル＝$\mathfrak{D}_1 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{D}_u$ハ多元体，故＝準同型ハ實ハ同型、故＝ $r = (\mathfrak{D} : \mathfrak{K}) \geqq \prod r_i$.
上述トクラベ階数ヲ考ヘレバ $e = \prod e_i$, $r = \prod r_i$ ガワカル、且ツ $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{D}_u$.

而シテコレハ $T_1 \times \cdots\cdots \times T_u$ ノ剰餘類体デアリ，$T_1 \times \cdots\cdots \times T_u$ ハ K＝對シテ不分岐（階数ヲ考ヘル）、故＝コレガ惰性多元体＝ナル。

昭和十一年度1月―6月分ノ會費金貳円也
ヲ至急御拂込ミ下サイ。

大阪市北區
大阪帝國大學
理學部數學教室　清水辰次郎

振替口座番號　大阪一七七四三番

前期會計決算ハ第84号ニ報告シテアリマス